

# 固体中微裂纹系统统计演化的基本描述<sup>1)</sup>

白以龙 柯孚久<sup>2)</sup> 夏蒙芬<sup>3)</sup>

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室)

**提要** 本文建议了一种在外界载荷作用下,在固体中产生的微损伤的统计演化的理论描述方法。特别是,作为一个例子,讨论了理想微裂纹系统,以便了解在微裂纹成核和扩展过程中,损伤演化的基本行为。本文也简单讨论了有关的平均损伤函数。

**关键词** 微裂纹,统计演化,数密度

## 一、引言

近年来,关于在载荷作用下,在固体中的微结构上发生的微损伤,及其对固体宏观力学性能的影响,越来越引起工程界的兴趣。连续损伤力学用内变量的方法,从宏观上处理这个问题<sup>[1]</sup>。其实,这种内变量应该是大量微损伤,例如微裂纹,微孔洞的某种平均。因此,从原则上讲,损伤问题应该从统计微损伤力学入手。

这种统计微损伤力学,大致要包括三个步骤。

第一,要恰当地刻画微损伤。所谓恰当,就是要详略得当。既要概括微损伤的各种主要特征,又不要繁杂到无法处理;既要简明,又要包括统计平均所需的各种信息。

第二,要概括地描述微损伤的演化。这里的关键问题是,如何确定微损伤的动力学规律。

第三,要表达出微损伤的统计效应是如何影响了材料的宏观力学性质的。也就是要阐明无损伤的原材料和受载而损伤的材料,在力学性能上发生差别的定量表达。例如,受损材料弹性模量降低,是怎样依赖于微损伤的演化的。

应该指出,连续损伤力学,从工程角度出发,跳过了前两步,直接地受损材料的力学性能的变化作为损伤的度量。这对工程应用会有直接的帮助。但是,这就脱离了真实的物理基础,并使得各类损伤度量间缺少有机的联系。为了将来能真正做到经济合理地评价和使用材料,看来有必要为材料的损伤建立有物理基础的描述。因此,尝试能包括上述三部分的统计微损伤描述,不仅有学术兴趣,也有实际需要。

在过去的十年左右,在这方面有过一些探索,如 Curran 及其同事<sup>[2]</sup>提出了微观统计断裂力学,发展了对微孔洞和微裂纹的试验统计。邢修三<sup>[3]</sup>曾基于一些假设,试图将受损材料的力学性质联系起来。然而,看来一个较统一的理论框架尚待建立。

1) 本工作部分得到国家自然科学基金委的资助。

2) 永久地址:北京航空航天大学,应用数理系,北京 100083。

3) 永久地址:北京大学,物理系,北京 100871。

本文于1990年4月5日收到第一次稿,于7月12日收到修改稿。

基于白以龙等过去的工作<sup>[4]</sup>, 本文试图陈述微损伤的统计演化的理论框架的建立方法。作为对损伤初期的描述, 提出了理想微裂纹系统这一近似模型。最后, 对损伤的各类平均做了试探性讨论。有关一维理想微裂纹系统统计演化的具体内容, 例如, 微裂纹数密度的饱和, 随机性扩展的效应等, 请参阅作者其它的文章<sup>[5]</sup>。

## 二、微裂纹统计演化的基本描述

在外载作用下材料发生的损伤通常由许多微孔洞或微裂纹组成(图1)。根据平面碰撞下产生的微裂纹的统计<sup>[2,6]</sup>, 金属中微裂纹的密度约为  $10^2-10^4/\text{mm}^2$ , 尺寸约为  $1\mu\text{m}-10^2\mu\text{m}$ 。因此, 对毫米尺寸的宏观微元, 对微裂纹做统计处理是可信的, 并仍可将受损材料认为是宏观均匀的。这样的处理, 与将多晶体金属当作均匀连续介质的近似是相当的, 因为晶粒尺寸也大约在  $1\mu\text{m}-10^2\mu\text{m}$  范围。当然, 微损伤完全不同于经典统计物理的对象, 如原子和分子。因此, 本研究乃是统计细观损伤力学。

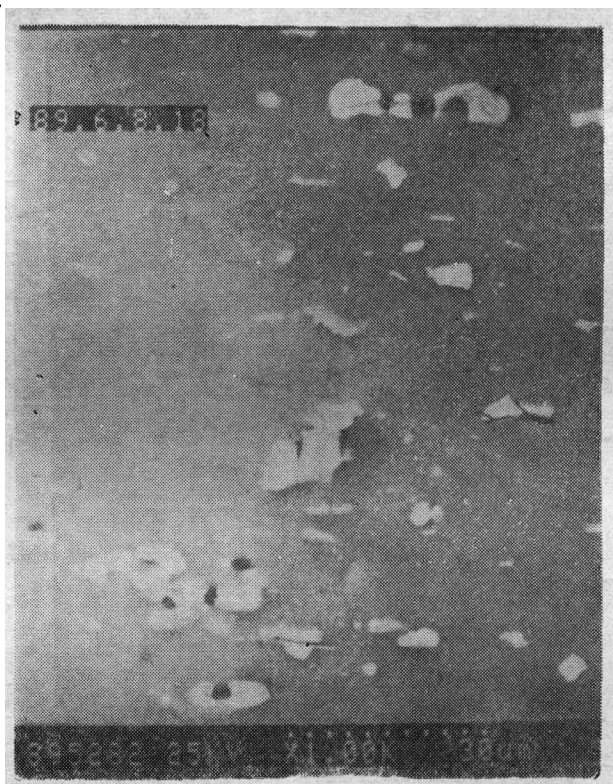


图1 受平面冲击载荷的铝合金材料中出现的微裂纹

本研究的对象是大量微损伤组成的系统。微损伤可以是微裂纹或微孔洞。它们的不同表现在有关的微观状态的描述和其细观动力学规律上, 本文以微裂纹作为示范系统来讨论。

就起源而言, 任何损伤都是材料中受载而变弱的部分, 如微裂纹的形态和分布决定的。这与其在进一步外载下的力学响应还不是一回事。但由于后者在实用上方便, 所以损伤力学用其为损伤度量。但是, 为阐明损伤机理, 微损伤的形态和分布及其演化应该是

问题的核心。

在断裂力学里,裂纹的形态被模型化为两个分离,平整,不受应力的平面,并由一尖锐的边缘将二平面连接而成。从显微观察上看,微裂纹当然不如宏观裂纹平整,也许还有粘连。但它究竟还是有一定长度、已开裂的缺陷。因此,微型化的宏观裂纹,被选为本文的模型。至于细观结构对微裂纹的影响,我们分别用成核分布率及扩展的涨落等方式来考虑<sup>[7]</sup>。

代替考虑所有微裂纹的所有微观状态所组成的相空间,我们考察一个微裂纹的所有可能微观态的子空间。这对于相似的微裂纹而言,是个可用的近似。这样,对微裂纹系统而言,就有三类微观变量。

- (1) 尺度。例如对椭圆形裂纹,这就是长轴和短轴。
- (2) 取向。例如对扁平的裂纹,这就是其法向的分量。
- (3) 空间坐标。例如微裂纹的几何中心可取为这类变量。

对于微裂纹系统的统计演化而言,环境参数和宏观载荷都是重要的控制变量,但它们都将以参变量的形式,出现于表征微裂纹成核、扩展、连接的细观动力学公式中。

结合实验观察,可以看到,这三类变量的变化速率不大一样。例如,微裂纹的尺度是演化中变化最明显的,而其形心和取向一般变化较少,除非微裂纹进入分叉或连接阶段。这样,作为一种可供选择的近似,可以一般性地将微观变量分为两类。一类记为在演化中

敏感的变量,  $p_i (i = 1, \dots, I)$ ,  $\dot{p}_i \neq 0$ 。另一类为不敏感的变量  $q_j (j = 1, \dots, J)$ ,  $\dot{q}_j \approx 0$ 。其中脚标  $i, j$  能分别遍及微裂纹所有微观状态的敏感和不敏感的量,上标代表其变化速率。

现在,让我们来考察所述相空间中的一个微元  $dQ$  (图 2)。  $dQ = (p_i, p_i + dp_i; q_j, q_j + dq_j; i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J)$ 。我们关心的是该微元中的微裂纹的数密度  $n(p_i, q_j)dQ$  在某载荷下随时间的演化。微裂纹数密度  $n(p_i, q_j)$  的定义是在单位相空间体积中微裂纹的个

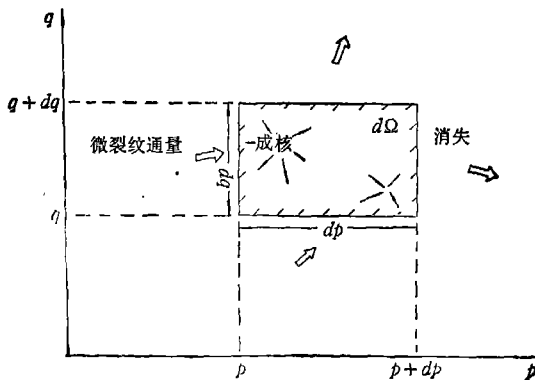


图 2 微损伤系统的子相空间微元的示意图

数。因为,在本问题中微裂纹的总数是随时间演变的,所以,与经典统计物理中使用概率密度不同,本研究讨论数密度更为方便。

在单位时间里,流入流出相空间微元  $dQ$  的微裂纹的流量,应该与该微元中微裂纹的成核与消失相平衡。这个在相空间的守恒律,导出微裂纹演化的如下控制方程。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^I \frac{\partial (n p_i)}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial (n q_j)}{\partial q_j} = n_N - n_A \quad (2.1)$$

其中:

$n = n(t, p_i, q_j, X; i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J)$  数密度。

$X$ : 环境和载荷参数。

$t$ : 广义时间, 如真实时间, 准静态中的平均应变, 疲劳中的循环因数等。

$P_i = \dot{p}_i: p_i$  的变化速率。

$Q_i = \dot{q}_i: q_i$  的变化速率。

$n_N$ : 微裂纹数密度的成核率。事实上它应包括新形成的微裂纹, 和由于较短裂纹连接而进入微元  $dQ$  的微裂纹。

$n_A$ : 微裂纹数密度的消失率。在多轴应力下, 微裂纹的消失可能是由于愈合, 或者是由于该微元  $dQ$  中微裂纹自身连接, 或与  $dQ$  之外的微裂纹连接, 而从  $dQ$  中消失。

根据前面的讨论,

$$Q_i = \dot{q}_i \approx 0 \quad (i = 1, \dots, J) \quad (2.2)$$

再者, 如果不是微损伤十分严重的后期, 则

$$n_A \approx 0 \quad (2.3)$$

即连接效应不明显, 而愈合可忽略。这样, 对微裂纹系统的初期演化可用如下简化方程:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^I \frac{\partial (nP_i)}{\partial p_i} = n_N \quad (2.4)$$

其中, 不敏感变量  $q_j$  是隐含的。

在方程(2.4)中有两个细观动力学过程。一个涉及单一微裂纹的演化, 即其微观状态参数的变化

$$\dot{p}_i = P_i = P_i(p_{l\xi}, q_{k\xi}, X) \quad (2.5)$$

脚标  $l$  和  $k$  分别包括  $i$  和  $j$  的所有值, 即  $l = 1, \dots, I$  和  $k = 1, \dots, J$ 。而脚标  $\xi$  应指在物理空间中与所论微裂纹邻近的所有裂纹。因为, 一般而言, 邻近裂纹间可能会有相互作用。

另一个细观动力学过程则是微裂纹成核。

$$n_N = n_N(p_{l\xi}, q_{k\xi}, n, X) \quad (2.6)$$

这样, 微分方程(2.4)和动力规律(2.5—2.6)就组成了微裂纹体系早期演化的基本描述。

但是, 实用上, 方程(2.4—2.6)对讨论损伤材料的宏观力学性质可能提供了极多的信息。而且, 方程所隐含的微裂纹间相互作用与耦合, 可能使得演化方程无法求解。即使是仅考虑一对对裂纹的相互作用, 也会导致一个方程系列。就象统计物理中的 BBGKY 系列那样。因此, 截断该系列对求解是必须的。

### 三、理想微裂纹系统

作为首次近似, 本文建议讨论理想微裂纹系统。满足以下条件的微裂纹, 被称之为理想微裂纹。

- (1) 微裂纹的成核和扩展是统计上相互独立的。
- (2) 微裂纹的成核和扩展唯一地由宏观场决定, 因此, 也就由载荷和环境参数决定。
- (3) 微裂纹间的平均相互作用可能改变宏观场, 因此, 其对成核和扩展的效应, 可以由宏观场的变化, 间接地考察。

显然, 理想微裂纹系统仅是一种简化的模型。它仅适合微裂纹间的连接和相互作用

可以忽略, 微裂纹密度比较稀疏的早期损伤。在这个意义上, 理想微裂纹好像是理想气体。从而方程(2.4—2.6)可以简化为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial (np_i)}{\partial p_i} = nN \quad (3.1)$$

$$P_i = P_i(p_l, q_k; X) \quad (3.2)$$

$$n_N = n_N(p_l, q_k; n, X) \quad (3.3)$$

描述理想微裂纹系统统计演化的方程(3.1—3.3)包括一个以数密度  $n$  为因变数的偏微分方程, 和二函数动力学关系。虽然方程(3.1)看起来是线性方程, 但是由于扩展和成核规律(3.2—3.3)的复杂性, 问题并不那么单纯。但是, 与方程(2.4—2.6)相比, 该方程的求解不再有原则性的困难。

作为一个例子, 我们具体考察如图 1 所示的铝合金靶板在平面冲击载荷下所出现的损伤。这种情况下的初始损伤乃是一些微裂纹, 长约几十到数百微米, 而且相当稀疏。此外, 所有微裂纹都几乎相互平行, 且与拉伸应力方向垂直。这样, 对这类实验中出现的微裂纹, 就可以用上面建议的理想微裂纹模型来讨论它的统计演化。进而, 对这个问题, 该理想微裂纹系统还可进一步简化, 即只用一个独立微观变量——微裂纹尺度  $c$ ——来描述。于是, 这就导出如下一维相空间中的演化方程<sup>[4]</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nc)}{\partial c} = n_N \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = c(c, \sigma) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_N = n_N(c, t, \sigma) \end{array} \right. \quad (3.6)$$

其中(3.5)和(3.6)分别是微裂纹的扩展和成核动力规律, 并依赖于拉伸应力  $\sigma$ 。

在一维应变这一由平面碰撞造成的状态下, 拉伸应力一般是矩形应力脉冲, 从而可以用应力幅值和持续时间表征。此外, 已经知道, 在这种载荷下的微裂纹成核率, 一般不显含时间<sup>[4]</sup>, 即

$$n_N = n_N(c, \sigma) \quad (3.7)$$

这些事实, 使得方程(3.4, 3.5, 3.7)可以找到如下的一般解, 而无须指定扩展和成核规律(3.5)和(3.7)的具体形式。

$$n = n(c, t) = \begin{cases} \frac{1}{c(c)} \int_{\eta}^c n_N(\xi) d\xi & c > b_1 \\ n_N(c) t & c < b_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

具体解法可参见文献[5]。在解式(3.8)中, 拉伸应力  $\sigma$  是一个参数, 为简化记法, 没有在解式中写出。广义时间  $t$  和微裂纹的尺度  $c$  是两个自变数。解(3.8)中含有一个中间变量  $\eta = \eta(c, t)$ 。该中间变量由以下等式和积分下限定义:

$$\left. \begin{array}{l} t = \int_{\eta(c,t)}^c \frac{d\xi}{c(\xi)} \quad (t < t_0) \\ \eta = b_1 \quad (t > t_0) \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

在以上的解式中, 不失一般性地假设了, 当微裂纹的尺度  $c$  小于某一截止值  $c \leq b_1$  时, 微裂纹就不能扩展, 即  $c = 0$ 。在式(3.9)中含有一特征时间  $t_0 = t_0(c)$ , 称为饱和时间,

定义为

$$t_0(c) = \int_{b_1}^c \frac{d\xi}{\xi(\xi)} \quad (3.10)$$

$t_0$  的存在代表了这类微裂纹系统的一种重要行为, 即微裂纹数密度的饱和. 考察尺度为  $c$  的微裂纹的数密度  $n$ . 若考察时间  $t$ , 长于该尺度  $c$  对应的饱和时间  $t_0(c)$ , 则依 (3.9) 式  $\eta$  不再依赖于时间, 从而解 (3.8) 也与时间无关了. 这就是数密度的饱和值. 而饱和现象存在与否, 则视反常积分 (3.10) 是否收敛, 而有有限积分值  $t_0$ . 因为在  $\xi = b_1$  处, 被积函数

$$\frac{1}{\xi(b_1)} \rightarrow \infty.$$

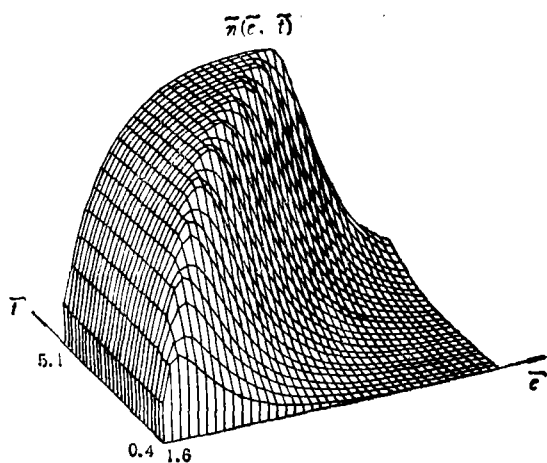


图 3

图 3 给出了在两种具体的成核和扩展模型下, 微裂纹统计演化的图像, 包括趋近饱和的过程. 有关细节的讨论, 请参见文献[5].

#### 四、平均损伤的初步估计

微裂纹统计演化的最终目的, 是要揭示微损伤的物理过程和受损材料的宏观力学性质的关系. 作为例子, 我们仍考察上节讨论过的受平面冲击而受损伤的材料, 目的是检验一下本文建议的方法, 是否可能给出合理可用的宏观平均量, 或更进一步, 能被宏观测量验证.

一般形式的第  $m$  阶损伤函数可定义为

$$D_m(t, \sigma) = \int_0^\infty n(c, t; \sigma) c^m dc \quad (4.1)$$

实际应用上可能用到的是如下低阶损伤函数

$$D_0(t, \sigma) = \int_0^\infty n(c, t; \sigma) dc \quad (4.2)$$

$$D_1(t, \sigma) = \int_0^\infty n(c, t; \sigma) c dc \quad (4.3)$$

$$D_2(t, \sigma) = \int_0^\infty n(c, t; \sigma) c^2 dc \quad (4.4)$$

$$D_3(t, \sigma) = \int_0^\infty n(c, t; \sigma) c^3 dc \quad (4.5)$$

零阶损伤函数  $D_0$  的意义比较直观. 根据微裂纹数密度的定义,  $D_0$  代表微裂纹的总数. 对前述理想微裂纹系统, 式 (4.2) 可表达为

$$D_0 = t \int_0^\infty \eta_N(c; \sigma) dc \quad (4.6)$$

对于非常早期的损伤,微裂纹成核起控制作用,这样,  $D_0$  可能是宏观损伤的恰当表达。下面检查一下,这能否被实验验证。首先,根据宏观累积损伤经验公式<sup>[8]</sup>,对持续时间  $10^2\text{ns}$

的冲击载荷造成的初始层裂,有以下拟合的准则(图 4)<sup>[6]</sup>

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)^{0.97} t = K \quad (4.7)$$

现在,再考察能否从微裂纹统计平均,导出经验公式(4.7)。微裂纹的实验统计发现<sup>[6]</sup>,单位时间微裂纹总数的增加率,线性依赖于应力,即

$$\int_0^\infty n_N(c; \sigma) dc \sim A\sigma + B \quad (4.8)$$

将(4.8)代入(4.6),可得到

$$(A\sigma + B)t \sim D_0 \quad (4.6a)$$

比较(4.7)和(4.6a),二者符合得相当满意。

一阶损伤函数  $D_1$  可理解为微裂纹的总尺寸效应。如果平行裂纹都处于一个平面之中,那么  $D_1$  就相当于能支持拉伸载荷的承载面积的缩小。这类似于连续损伤力学中类似的定义。

$$D_1 = \int_0^\infty n c dc = N(t, \sigma) \cdot \bar{c}(t, \sigma) \quad (4.9)$$

式中  $N$  和  $\bar{c}$  是微裂纹总数和平均微裂纹尺度。

将解式(3.8)代入定义(4.9)中,交换积分顺序,并忽略  $c < b_1$  部分不能扩展的微裂纹,则

$$\begin{aligned} D_1 &= N\bar{c} = \int_{b_1}^\infty \frac{c}{\bar{c}(c)} \int_{\eta(c)}^\xi n_N(\xi) d\xi dc \\ &= \int_{b_1}^\infty n_N(\xi) d\xi \int_{\eta(\xi)}^\xi \frac{c}{\bar{c}(c)} dc \\ &= \int_{b_1}^\infty n_N(\xi) \zeta(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中  $\eta$  和  $\zeta$  定义如下

$$t = \int_{\eta(\xi, t)}^\xi \frac{dc}{\bar{c}(c)} \quad (4.11)$$

$$\zeta(\xi, t) = \int_{\eta(\xi, t)}^\xi \frac{c}{\bar{c}(c)} dc \quad (4.12)$$

从式(4.10)和式(4.6)的比较,可以看出  $\zeta(\xi, t)$  是个与时间有关的,代表尺度的权重函数。还可以从损伤函数  $D_1$  的演化方程出发,来考察该问题。用自变量  $c$  乘基本方程(3.4),得

$$\frac{\partial(nc)}{\partial t} + c \frac{\partial(nc)}{\partial c} = cn_N \quad (4.13)$$

在积分域 $(0, \infty)$ 内积分方程(4.13), 可以得到  $\dot{D}_1$

$$\begin{aligned}\dot{D}_1 &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty n c d c \\ &= \int_0^\infty \dot{n}_N c d c - \int_0^\infty c \frac{\partial(n c)}{\partial c} d c \\ &= \int_0^\infty \dot{n}_N c d c + \int_0^\infty n \dot{c} d c \\ &= N_N \bar{c}_N + N \bar{\dot{c}}\end{aligned}\quad (4.14)$$

其中  $N_N \bar{c}_N$  是与时间无关的,

$$\bar{c}_N = \int_0^\infty n_N c d c / \int_0^\infty n_N d c = \int_0^\infty n_N c d c / N_N.$$

因此, 积分(4.14)给出  $D_1$

$$D_1 = N_N \bar{c}_N t + \int_0^t N \bar{\dot{c}} d t \quad (4.15)$$

对于短时载荷, 表征微裂纹扩展的量  $\bar{c}$  不重要, 则损伤  $D_1$  线性依赖于时间。但对于较长时的载荷, 扩展成为重要, 则(4.15)式的第二项将给出非线性的时间依赖关系。这些趋势和已经得到的经验层裂规律定性符合<sup>[9]</sup>。

类似地, 可以求得第  $m$  阶损伤函数及其演化方程的公式

$$D_m = N \bar{c}^m \quad (4.16)$$

$$= \int_0^\infty n_N(\xi) \zeta_m(\xi, t) d \xi \quad (4.17)$$

$$\zeta_m(\xi, t) = \int_\eta^\xi \frac{c^m}{c} d c \quad (4.18)$$

$$\dot{D}_m = \int_0^\infty \dot{n}_N c^m d c + \int_0^\infty n(c^m) \cdot d c \quad (4.19)$$

$$D_m = N_N \bar{c}_N^m t + \int_0^t N(c^m) \cdot d t \quad (4.20)$$

其中, 二阶损伤函数  $D_2$  具有如下物理意义。若微裂纹是圆盘状的, 则  $D_2$  也相当于承载面积的减缩。但如果微裂纹是平面应变下的贯穿裂纹, 则  $D_2$  隐含由于微裂纹的存在而引起的变形能的释放。因此, 对于与能量有关的损伤度量,  $D_2$  就显得重要了。三阶损伤函数  $D_3$ , 对于圆盘状裂纹, 具有类似的能量含义。当然, 对于不同具体问题, 取决于载荷方式及有关构形, 损伤函数的具体表达将会不同。

### 参 考 文 献

- [1] Chaboche, J.J., *J. Appl. Mech.*, 55, 1(1988), p.65.
- [2] Curran, D.R., Seaman, L. and Shockey, D.A., *Phys. Report*, 147, 5—6(1987), p.253.
- [3] 邢修三, 力学进展, 16, 4(1986), p.495.
- [4] Bai Yilong, Ke Fujin and Luo Limin, *J. de Physique*, Tome 49, (1988), C3—215.
- [5] 柯孚久、白以龙、夏蒙芬, 中国科学(A辑), 6(1990), p.621.
- [6] 骆利民, 一种铝合金层裂损伤成核规律的实验研究和简单演化模型, 中国科学院力学研究所硕士论文(1988).
- [7] 夏蒙芬、柯孚久、吕永华、白以龙, 理想微裂纹系统中的随机扩展效应, LNM-9003 (1990).
- [8] Tuler, F.R. and Butcher, D.M., *Int. J. of Fracture Mech.*, 4, 4(1968), p.431.



- [9] Shen Letian, Bai Yilong and Zhao Shida, *Proc. of Int. Symp. on Intense Dynamic Loading and Its Effects*, Science Press, Beijing, China, (1986), p.753.

## FORMULATION OF STATISTICAL EVOLUTION OF MICROCRACKS IN SOLIDS

Bai Yilong   Ke Fujiu   Xia Mengfen

(Laboratory for Non-Linear Mechanics of Continuous Media Institute of Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences Beijing, China, 100080)

**Abstract**   The paper presents a principal formulation of statistical evolution of microcracks, occurring in solids, subjected to external loading. In particular, the concept of ideal microcracks is elaborated, in order to describe the fundamental features of damage resulting from nucleation and extension of microcracks. Relevant average damage functions are also discussed.

**Key words**   micro-cracks, statistical evolution, number density