

# 理想微裂纹系统演化的特征\*

柯孚久\*\* 白以龙 夏蒙禁\*\*\*

(中国科学院力学研究所 非线性连续介质力学开放实验室, 北京 100080)

## 摘 要

本文以微裂纹数密度分布函数描述理想微裂纹系统, 考察其演化的一般特征. 对微裂纹的扩展过程采用了确定论的模型. 发现, 在一定条件下, 微裂纹数密度的演化可出现饱和现象. 本文用几个例子具体显示了理想微裂纹系统的统计行为, 并与实验观察结果进行了初步比较.

**关键词:** 理想微裂纹, 数密度, 饱和, 成核, 扩展

## 一、引 言

在一类材料中, 载荷导致的损伤表现在材料内部有大量微裂纹萌生和扩展. 这些微裂纹的尺度一般在几微米到几百微米的范围, 是属于细观尺度的现象. 近年来, 这一领域中研究工作的一个重要动向是把宏观与细观两个层次结合起来考察这种损伤过程. 这种研究途径有利于更深入地了解损伤机制, 以便更科学地研制和使用材料.

对于一般的微损伤演化问题, 在一个包含宏观与细观两个层次的统一理论中, 对微裂纹系统采用统计描述是一种很有效的方法. 这种统计描述以微裂纹的细观动力学为基础, 而微裂纹的宏观效应则由其统计平均结果给出.

在材料损伤初期, 微裂纹比较稀疏, 裂纹间的耦合效应较弱. 在这种条件下, 材料的损伤可用一种比较简单的模型描写, 我们称之为理想微裂纹系统. 理想微裂纹系统的主要特征可以大致规定如下: 微裂纹的成核、扩展过程是统计独立的, 裂纹间的相关效应不起重要作用; 每个裂纹的成核与扩展过程由该处的局域条件决定, 局域条件与材料性质、载荷、以及全部裂纹的平均效应有关.

对于形状简单、规整的微损伤或微裂纹, 单个微裂纹可以由它的尺度  $c$  表征.  $c$  可以代表裂纹的体积、截面积或长度, 视问题而定. 为了对微裂纹系统进行统计描述, 我们引入微裂纹数密度分布函数  $n(c, t)$ .  $n$  的定义是:  $t$  时刻、单位体积中, 尺度处于  $c-c+dc$  范围的裂纹数为  $n(c, t)dc$ . 在损伤初期,  $n$  的演化主要由成核过程和扩展过程决定, 裂纹间互相连接

本文 1989 年 8 月 10 日收到, 1989 年 12 月 6 日收到修改稿.

\* 本工作部分得到国家自然科学基金委员会的资助.

\*\* 北京航空航天大学应用数理系, 北京 100083.

\*\*\* 北京大学物理系, 北京 100871.

的过程不起重要作用。以下,我们将导出  $n$  的演化方程。

考察变量  $c$  所张成的一维相空间中相体元  $(c, c + \Delta c)$  内微裂纹数密度

$$\int_c^{c+\Delta c} n(c', t) dc'$$

的变化。在  $t$  到  $t + \Delta t$  时间内,其增量为

$$\int_c^{c+\Delta c} [n(c', t + \Delta t) - n(c', t)] dc'.$$

此增量来源于两部分的贡献:一是在该相体元内微裂纹萌生过程的贡献,可表达为

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_c^{c+\Delta c} n_N(c', t') dc'.$$

这是源项,其中,  $n_N$  是裂纹的成核率密度。另一部分是裂纹扩展过程的贡献,可看作是相空间中的流动项,分为流入、流出两项:

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' [n(c, t') \dot{c}(c, t') - n(c + \Delta c, t') \dot{c}(c + \Delta c, t')],$$

其中,  $\dot{c}$  是裂纹的扩展速率。令  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta c \rightarrow 0$ , 便可导出微裂纹数密度分布函数的下述演化方程:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial c} (\dot{c} n) = n_N. \quad (1)$$

在方程(1)中,  $n$  的演化特征由  $n_N$  与  $\dot{c}$  决定。对于理想微裂纹系统,可以假定  $n_N$  和  $\dot{c}$  依赖于材料的力学性质、载荷应力  $\sigma(t)$  及裂纹尺度  $c$ , 而与  $n$  无关:

$$n_N = n_N(c, \sigma(t), \text{材料参数}), \quad (2)$$

$$\dot{c} = \dot{c}(c, \sigma(t), \text{材料参数}). \quad (3)$$

在考察裂纹比较稀疏的理想微裂纹系统时,可以认为材料参数不受裂纹演化过程的影响而保持恒定。为了揭示基本物理规律,本文将限于考虑恒定载荷应力(即  $\sigma(t)$  为常数)的情形。为简略记法,以下将不再明显标出这些恒定参数。(3)式意味着,系统内一定尺度的裂纹的扩展速率是完全确定的。这种模型我们称之为确定论的扩展模型。

(2)与(3)式的具体形式可由实验测定。在理论上,确定它们则是细观动力学的任务。但是,在微裂纹尺度范围内,有关成核率与扩展速率的资料极不完备,很多方面尚属空白。在这种情况下,为了推动这一领域的研究工作,我们一方面开展有关的实验研究;另一方面,从理论上考察方程(1)的解的一般特征,并选用若干成核与扩展的模型,具体显示理想微裂纹系统的演化过程。我们相信,这种研究对于这一领域的进一步探索应该有启发和参考意义。

## 二、理想微裂纹系统演化的一般特征

裂纹的扩展过程通常有下述特征<sup>[1]</sup>: 只当尺度超过某个临界尺度时才出现扩展过程,而小于临界尺度的裂纹几乎是不扩展的。假定微裂纹的扩展也具有上述特点,并令  $b_1$  为其临界尺度,则扩展速率(3)式的一般形式为

$$\dot{c} = \begin{cases} 0, & \text{当 } c < b_1, \\ A(c), & \text{当 } c \geq b_1, \end{cases} \quad (4)$$

并有  $A(b_1) = 0$ 。

为了简单,我们令初始时刻( $t=0$ )微裂纹数密度为零. 根据一阶偏微分方程理论,并考虑到(2)式与(4)式,可以求得方程(1)的解的一般形式. 在  $c < b_1$  区,对方程(1)直接积分便可得到解. 在  $c \geq b_1$  区,方程(1)的特征方程为

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dc} &= \frac{1}{A}, \\ \frac{dn}{dc} &= -\frac{A'}{A}n + \frac{1}{A}n_N,\end{aligned}$$

其中  $A' = dA/dc$ . 由此可得到方程(1)的解的普遍形式为

$$n(c, t) = \frac{1}{A(c)} \left[ \int_{b_1}^c n_N(c') dc' + \phi \left( t - \int_{b_1}^c \frac{dc'}{A(c')} \right) \right], \quad (5)$$

其中,  $\phi$  是其宗量的任意函数. 由初始条件  $n(c, 0) = 0$ , 可确定  $\phi$  的具体形式为

$$\phi \left( t - \int_{b_1}^c \frac{dc'}{A(c')} \right) = - \int_{b_1}^{\eta} n_N(c') dc', \quad (6)$$

其中  $\eta = \eta(c, t)$  的定义如下: 令

$$t_0 = t_0(c) = \int_{b_1}^c \frac{dc'}{A(c')}, \quad (7)$$

当  $t \geq t_0$  时,

$$\eta = b_1, \quad (8a)$$

而当  $t < t_0$  时,  $\eta$  由下式确定:

$$t = \int_{\eta(c,t)}^c \frac{dc'}{A(c')}. \quad (8b)$$

由(8b)式所给出的函数  $\eta = \eta(c, t)$  的意义可以用如下方式解释: 设想在  $t=0$  时存在一条尺度为  $\eta(c, t)$  的裂纹, 此裂纹按扩展速率函数  $A$  扩展, 则至  $t$  时刻该裂纹的尺度扩展到  $c$ . 当然, 这只是一种虚拟的设想. 由于我们假定了初始时刻无裂纹,  $t$  时刻系统中的裂纹实际上是在  $(0, t)$  期间萌生的尺度不同的裂纹扩展而成的.

由(5)–(8)式, 方程(1)的一般解可表达为

$$n(c, t) = \begin{cases} n_N(c)t, & c < b_1, \\ \frac{1}{A(c)} \int_{\eta(c,t)}^c n_N(c') dc', & c \geq b_1. \end{cases} \quad (9)$$

在(9)式中, 尺度小于临界值  $b_1$  的裂纹数密度随时间线性增大, 这是扩展速率为零并具有恒定成核率的简单结果.

现考察  $c \geq b_1$  区. 首先, 我们指出, 方程(1)的稳态  $\left( \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \right)$  形式为

$$\frac{\partial}{\partial c} [A(c)n] = n_N(c), \quad (10)$$

稳态解为

$$n_0(c) = \frac{1}{A(c)} \int_{b_1}^c n_N(c') dc'. \quad (11)$$

容易看出, 只要  $A'(b_1) \neq 0$ , 便有

$$n_0(b_1) = n_N(b_1)/A'(b_1). \quad (12)$$

在这种条件下,便存在有限的稳态解. 这里顺便指出,若  $n_0(c)$  曲线存在极值点  $c = c_M$ , 则亦有与 (12) 式相似的关系

$$n_0(c_M) = n_N(c_M)/A'(c_M).$$

由 (9) 式,  $c \geq b_1$  区中  $n(c, t)$  随时间  $t$  的变化是由  $\eta(c, t)$  随时间的变化决定的, 而  $\eta$  随时间的变化则由 (8) 式给出. 对于每一尺度  $c$ , 都可由 (7) 式定义一个特征时间  $t_0 = t_0(c)$ , 只要当  $c \rightarrow b_1$  时  $A(c)$  趋于零的阶数足够低,  $t_0$  便具有确定的有限值. 在这种情况下, 在  $t < t_0$  阶段,  $\eta$  随着  $t$  的增大而减小; 当  $t = t_0$  时,  $\eta$  减小至  $b_1$ , 然后便保持不变. 相应地, 在  $t < t_0$  阶段,  $n$  随  $t$  而增大; 当  $t = t_0$  时,  $n$  达到一个不变值, 与稳态解 (11) 式比较可知这个不变值即为稳态解  $n_0(c)$  的相应值.

以上讨论表明,  $c \geq b_1$  区微裂纹数密度分布函数  $n(c, t)$  的演化有一个重要特征: 在一定条件下, 将出现饱和现象. (7) 式定义的  $t_0$  即为饱和时间. 由 (7) 式可看出  $t_0$  相当于裂纹从临界尺度  $b_1$  扩展到尺度  $c$  所需的时间.  $c$  越大, 则  $t_0$  越长, 因此, 饱和现象是从  $b_1$  开始逐渐向大尺度方向推移的. 由

$$t = \int_{b_1}^{c_0} \frac{dc'}{A(c')} \quad (13)$$

可定义一个特征尺度  $c_0 = c_0(t)$ , 它给出了  $t$  时刻饱和区的上边界. 在某一时刻考察微裂纹数密度分布  $n(c, t)$  时, 可以看到它按尺度  $c$  划分为 3 个特征不同的区, 依次是非扩展区 ( $c < b_1$ ) 和扩展区中的饱和区 ( $b_1 \leq c \leq c_0$ ) 与未饱和区 ( $c > c_0$ ). 在饱和区,  $n(c, t)$  不再随时间变化并等于稳态解  $n_0(c)$ . 饱和区与未饱和区的分界  $c_0$  随时间  $t$  的增大而不断向大尺度方向推移. 趋向饱和的过程反映了成核过程与扩展过程之间的竞争. 对于无初始裂纹的情形, 开始时是成核过程占主导; 当两个过程互相平衡时, 便达到饱和.

将 (9) 式所给出的  $n(c, t)$  对  $c$  积分, 便可得到微裂纹的总数密度

$$N(t) = \int_0^{\infty} n(c, t) dc = N_1 + N_2 + N_3, \quad (14)$$

其中,  $N_1, N_2$  与  $N_3$  分别代表非扩展区 ( $c < b_1$ )、饱和区 ( $b_1 \leq c \leq c_0$ ) 和未饱和区 ( $c > c_0$ ) 的贡献. 将 (9) 式代入 (14) 式, 可求得

$$N_1 = t \int_0^{b_1} n_N(c) dc, \quad (15a)$$

$$N_2 = t \int_{b_1}^{c_0} n_N(c) dc - \int_0^t dt' A(c_0) n(c_0, t'), \quad (15b)$$

$$N_3 = t \int_{c_0}^{\infty} n_N(c) dc + \int_0^t dt' A(c_0) n(c_0, t'), \quad (15c)$$

(15a)–(15c) 式中, 右端第一项分别代表三个区中的累积成核数. (15b) 或 (15c) 式右端第二项代表穿越  $c = c_0$  的累积通量数. 由 (14) 与 (15) 式, 得到

$$N(t) = t \int_0^{\infty} n_N(c') dc', \quad (16)$$

总数密度与扩展过程无关, 仅由成核过程决定. 这个结果是很显然的. 事实上, 将方程 (1) 对  $c$  积分便得到  $N(t)$  遵从的方程为

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_0^{\infty} n_N(c) dc. \quad (17)$$

(16) 式是方程 (17) 的直接结果。

现在, 我们选用裂纹扩展速率和成核率的若干模型, 以便对微裂纹数密度演化的特征有比较具体的了解。

先考虑扩展速率模型。Berry 由简单的理论给出<sup>[1]</sup>

$$c = \begin{cases} 0, & c \leq b_1, \\ \alpha \sqrt{(1 - b_1/c)[1 - (2/q^2 - 1)b_1/c]}, & c > b_1, \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $\alpha$  是最大扩展速率的理论值, 由表面波的波速控制;  $b_1$  是临界裂纹尺度, 对于圆币形裂纹可取  $b_1 = \pi K_{Ic}^2 / 4\sigma^2$ ,  $K_{Ic}$  是平面断裂韧性,  $\sigma$  是施加的拉伸载荷;  $q$  是过载函数  $q = \sigma / \sigma_c$ 。当载荷  $\sigma \gg \sigma_c$  时, (18) 式简化为

$$c = \begin{cases} 0, & c \leq b_1, \\ A(c) = \alpha \sqrt{1 - b_1^2/c^2}, & c > b_1. \end{cases} \quad (19)$$

在本文中, 将选用 (19) 式作为微裂纹扩展过程的细观动力学模型。其中,  $\alpha$  和  $b_1$  是材料参数和载荷应力组合的特征参数。

由 (7) 式定义的饱和时间  $t_0$  及由 (13) 式定义的饱和区边界  $c_0$  均仅取决于扩展速率模型。当采用模型 (19) 式时, 有

$$t_0 = \frac{c}{\alpha} \sqrt{1 - b_1^2/c^2}, \quad (20)$$

$$c_0 = \sqrt{b_1^2 + \alpha^2 t^2}. \quad (21)$$

当  $c \gg b_1$  时,  $t_0 \simeq c/\alpha$ ,  $c_0 \simeq \alpha t$ 。将 (19) 式代入 (8) 式, 可求得  $\eta$  的具体形式为

$$\eta = \begin{cases} b_1, & c < \sqrt{b_1^2 + \alpha^2 t^2}, \\ \sqrt{(\sqrt{c^2 - b_1^2} - \alpha t)^2 + b_1^2}, & c \geq \sqrt{b_1^2 + \alpha^2 t^2}. \end{cases} \quad (22)$$

我们曾在  $c = \alpha$  为常数的简单模型下讨论过微裂纹系统的演化问题<sup>[2,3]</sup>。对于模型 (19) 式, 扩展速率为常数相当于令  $b_1 = 0$ 。由 (20)–(22) 式, 此时有  $t_0 = c/\alpha$ ,  $c_0 = \alpha t$ , 以及  $\eta = c - \alpha t$ 。这正是文献 [2] 和文献 [3] 中的结果。

裂纹数密度  $n(c, t)$  的演化规律及其饱和值不仅取决于扩展速率, 而且还与成核率有关。以下, 我们将选用两种不同的模型。

第一种成核率模型 (称为模型 (I)) 取自参考文献 [4], 其形式为

$$n_N(c) = A_1 e^{-c/b_1}. \quad (23)$$

在 (19) 与 (23) 式所给的模型下, 由 (9) 与 (23) 式, 得到

$$n(c, t) = \begin{cases} A_1 t e^{-c/b_1}, & c < b_1, \\ \frac{A_1 b_2}{\alpha \sqrt{1 - b_1^2/c^2}} e^{-c/b_2} (e^{\frac{c-b_1}{b_2}} - 1), & b_1 \leq c \leq \sqrt{b_1^2 + \alpha^2 t^2}, \\ \frac{A_1 b_2}{\alpha \sqrt{1 - b_1^2/c^2}} e^{-c/b_2} \left[ \exp\left(\frac{c - \sqrt{(\sqrt{c^2 - b_1^2} - \alpha t)^2 + b_1^2}}{b_2}\right) - 1 \right], & c > \sqrt{b_1^2 + \alpha^2 t^2}, \end{cases} \quad (24)$$

(24) 式中第二个式子即为稳态分布  $n_0(c)$  的表达式。在模型 (19) 中,  $A'(b_1) \rightarrow \infty$ , 故由 (12) 式有  $n_0(b_1) = 0$ 。由 (16) 与 (23) 式, 可求出在模型 (I) 中

$$N(t) = A_1 b_2 t. \quad (25)$$

现在考虑第二种成核率模型(模型 (II))

$$n_N(c) = A_1 \frac{c}{b_2} e^{-c^2/b_2^2}. \quad (26)$$

这个模型与模型 (I) 的主要区别是使很小尺度的裂纹成核率变小, 这是为了模拟实验上所发现的这种迹象。此外, 模型 (II) 在大尺度时其成核率比模型 (I) 衰减更快。由 (19) 与 (26) 式, 可以得到

$$n(c, t) = \begin{cases} A_1 t \frac{c}{b_2} e^{-c^2/b_2^2}, & c < b_1, \\ \frac{A_1 b_2}{2\alpha \sqrt{1 - b_1^2/c^2}} e^{-c^2/b_2^2} (e^{\frac{c^2 - b_1^2}{b_2^2}} - 1), & b_1 \leq c \leq \sqrt{b_1^2 + \alpha^2 t^2}, \\ \frac{A_1 b_2}{2\alpha \sqrt{1 - b_1^2/c^2}} e^{-c^2/b_2^2} \left[ \exp\left(\frac{2\alpha t \sqrt{c^2 - b_1^2} - \alpha^2 t^2}{b_2^2}\right) - 1 \right], & c > \sqrt{b_1^2 + \alpha^2 t^2} \end{cases} \quad (27)$$

以及

$$N(t) = \frac{1}{2} A_1 b_2 t, \quad (28)$$

(27) 式中第二个式子即为稳态分布  $n_0(c)$  的表达式。在成核率模型 (23) 和 (26) 式中,  $A$  和  $b_2$  都是材料参数和载荷应力组合的特征参数。

以上结合具体模型所进行的计算, 一方面是为了演示在我们的理论框架下如何确定微裂纹系统的统计行为; 另一方面, 是试图用具体的例子描绘微裂纹系统演化的某些一般特征, 对这些特征的深入了解将对进一步的研究有所助益。为了得到更直观的图象, 在下一节中, 将给出一部分数值计算结果, 并用一系列图表把它们显示出来。

### 三、数值计算结果

本节给出微裂纹数密度分布演化的数值计算结果, 扩展速率用 (19) 式所示模型, 成核率用模型 (I) ((23) 式) 或模型 (II) ((26) 式)。全部结果均用约化量表达, 其定义为

$$\begin{aligned} x &= c/b_2, \quad \tau = \alpha t/b_2, \\ \tilde{n} &= \alpha n/A_1 b_2, \quad b = b_1/b_2, \end{aligned}$$

其中,  $\alpha, b_2$  与  $A_1$  均是出现在模型中的参量。以约化量表示时, 非扩展区在  $x < b$ , 扩展区

( $x \geq b$ ) 中, 扩展速率为

$$\frac{dx}{d\tau} = \tilde{A}(x) = \sqrt{1 - b^2/x^2},$$

饱和时间  $\tau_0$  与饱和区边界  $x_0$  分别为

$$\tau_0 = \int_b^x \frac{dx'}{\tilde{A}(x')} = x \sqrt{1 - b^2/x^2},$$

$$x_0 = \sqrt{b^2 + \tau^2}.$$

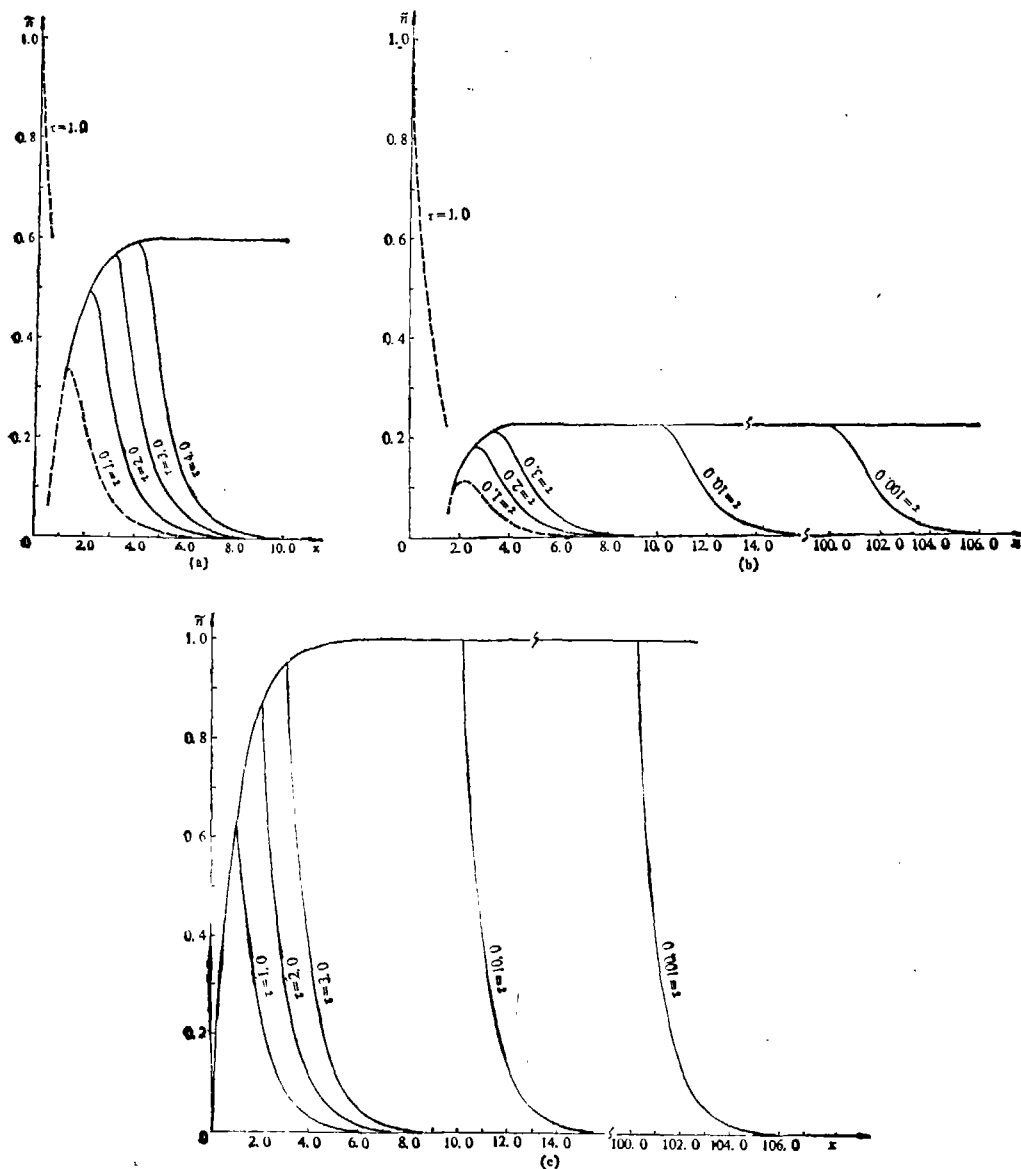


图 1  $\bar{n}-x$  曲线(成核率模型 (I))  
((a)  $b = 0.5$ , (b)  $b = 1.5$ , (c)  $b = 0$ )

当  $x \gg b$  时, 有  $\tau_0 \simeq x$ ,  $x_0 \simeq \tau$ . 饱和数密度为

$$\tilde{n}_0(x) = \frac{1}{\tilde{A}(x)} \int_b^x \tilde{n}_N(x') dx',$$

其中  $\tilde{n}_N(x) = n_N(b_1 x)/A_1$ . 总数密度的约化形式为  $\tilde{N} = \alpha N/A_1 b_1^2$ . 对模型 (I), 有  $\tilde{N} = \tau$ ; 对模型 (II), 有  $\tilde{N} = \frac{1}{2} \tau$ .

图 1 是用成核率模型 (I) 所得到的不同时刻  $\tau$  的  $\tilde{n}-x$  曲线. 图 1(a)–(c) 分别相应于  $b = 0.5, 1.5$  及 0. 在前两个图中, 曲线均由非扩展区, 及扩展区中的饱和区和未饱和区三部分组成, 两个图的特征相似. 非扩展区内,  $\tilde{n}$  随  $\tau$  线性增大, 图中只给出一个时刻 ( $\tau = 1$ ) 的曲线. 图 1(c) 中取  $b = 0$ , 相当于扩展速率为常数的情形. 图 1(c) 与前两个图的差别, 一是不出现非扩展区; 另一点是在饱和区边界附近的行为不同. 图 1 中最上面的曲线为饱和曲线. 图 1(c) 与前两个图中的饱和曲线在小尺度区 ( $x \sim b$ ) 有明显差异. 比较不同时刻的曲线, 可以看到饱和区不断向大尺度方向推移的过程.

图 2 是裂纹按尺度分布的概率密度. 概率密度分布函数的定义为

$$\rho(c, t) = \frac{1}{N(t)} n(c, t). \quad (29)$$

在图 2 中, 用约化量  $\bar{\rho} = \tilde{n}/\tilde{N}$  表达. 图 2 只画出  $b = 0.5$  的情形. 在非扩展区,  $\bar{\rho}$  不随时间变化, 因为  $\tilde{n}$  与  $\tilde{N}$  在此区均正比于时间. 在扩展区, 可看到它划分为饱和区和未饱和区, 饱

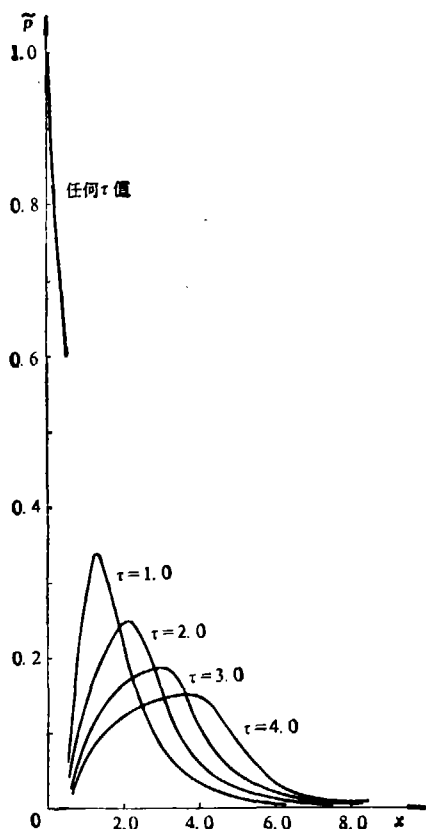


图 2  $\bar{\rho}-x$  曲线 ( $b = 0.5$ )

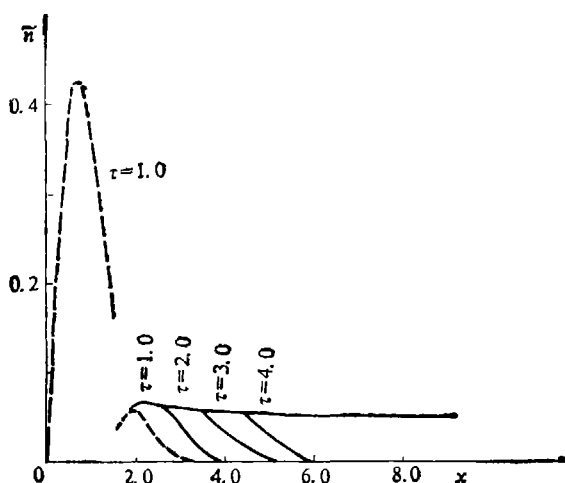


图 3  $\bar{n}-x$  曲线(成核率模型 (II)) ( $b = 1.5$ )

和区边界不断向大尺度方向推移, 概率密度分布的峰值也不断向大尺度方向移动.

图 3 是用成核模型 (II) 所得的结果, 取  $b = 1.5$ . 非扩展区的曲线与图 1 很不相同, 这



是两种成核率模型在小尺度时的明显差异所致。在扩展区,与图1的特征基本相同,这是由于 $\tilde{n}$ 的演化联系于成核率的积分效果,对其细节并不十分敏感。

为了更形象地显示 $\tilde{n}(x, \tau)$ 的演化特征,在图4中给出了 $\tilde{n}$ 随 $x$ 与 $\tau$ 变化的三维图象,其条件与图1(b)相同。为了方便,我们将变量 $x$ 与 $\tau$ 的范围各分成两段,分别在图4(a)和(b)中给出。两个图互相连接便构成一个完整的图。从这些图中可以看到,饱和曲面在小尺度区呈斜坡状,在大尺度区以近于平台的形式延伸;饱和区的边界大体上沿着 $x$ 轴与 $\tau$ 轴的分角线方向推移。在图4中,坐标间隔分别取为 $\Delta x = 0.5$ ,  $\Delta \tau = 0.5$ 。

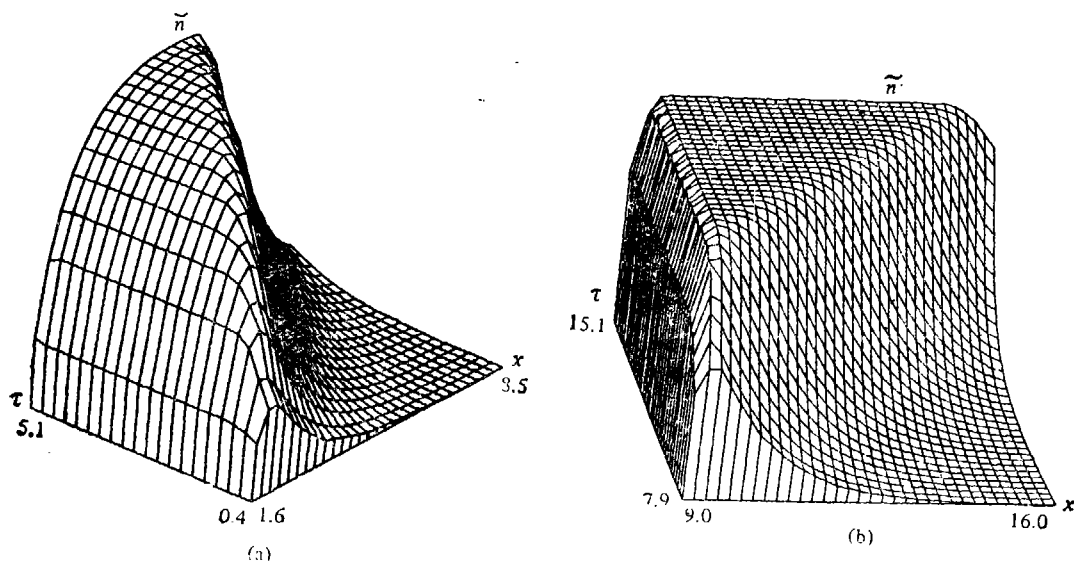


图4  $\tilde{n}(x, \tau)$  的三维图象  
(条件与图1(b)相同)

最后,我们对饱和时间 $t_0$ 作一量级估计。对金属,可取 $b_2 = 3 \mu\text{m}$ ,  $\alpha = 1.9 \times 10^3 \text{cm/s}^{[1]}$ ,此外,令 $b = 1$ (即 $b_1 = b_2$ )。由(20)式可求出相应于不同尺度 $c$ 的裂纹的饱和时间,结果列于表1中。由表1中可看到,扩展区( $c > b_1$ )中,小尺度裂纹的饱和时间很短,当 $c \gg b_1$ 时, $t_0 \simeq c/\alpha$ 。对于毫米量级的裂纹,饱和时间可达微秒量级。实际材料中的饱和时间只有在确定了裂纹的扩展规律以后才能得到。

表1 相应于不同裂纹长度 $c$ 的饱和时间 $t_0$   
(取 $b_2 = 2 \mu\text{m}$ ,  $\alpha = 1.9 \times 10^3 \text{cm/s}$ ,  $b = 1$ )

$c$ ( $\mu\text{m}$ )	3	6	30	150	300	3000
$t_0$ (ns)	0	2.735	15.71	78.93	157.9	1579

## 四、讨论与结论

本文所讨论的是关于损伤微裂纹系统的一种统计理论,以微裂纹数密度分布函数 $n(c, t)$ 对理想微裂纹系统进行统计描述。损伤微裂纹引起的宏观力学效应可由按 $n(c, t)$ 进行适当

的统计平均而求得。本文着重考察  $n(c, t)$  的演化规律, 给出了  $n$  的演化方程普遍解的形式, 讨论了演化的一般特征。

$n$  的行为联系于成核率模型与扩展速率模型, 目前尚无比较可靠的模型可供选用, 这方面的研究有待进一步深入。本文所选用的模型多少带有一定的试探性。我们用这些模型进行计算, 一方面是为了说明在本文的理论框架下如何确定微裂纹系统的统计行为; 另一方面, 是试图借助这些模型具体显示微裂纹系统演化的某些一般特征。这些研究结果可为进一步的探索提供有益的思路。

本文发现, 微裂纹数密度分布  $n(c, t)$  的演化过程有一个值得注意的特征, 即在一定条件下, 扩展区中可出现趋向饱和的现象。现对出现饱和现象的条件作进一步的讨论。

本文是在成核率与扩展速率均不显含时间的模型下导出饱和现象的。这大体上相当于恒定载荷。损伤初期, 裂纹的发展对成核与扩展过程尚无影响, 并且连接过程可以忽略。实际上, 这里不显含时间的条件可理解为准稳态条件, 即只要  $n_N$  与  $c$  变化的特征时间大于特征饱和时间便可出现明显的饱和现象。特征饱和时间是指裂纹分布的主要尺度范围的平均饱和时间。

出现饱和现象还与扩展速率在临界尺度  $c = b_1$  处的截断方式有密切关系。在有限时间内达到饱和要求 (7) 式所给出的饱和时间  $t_0$  是有限值。这相当于要求 (7) 式的积分是收敛的, 而这个积分的收敛性取决于扩展速率  $c = A(c)$  在  $c \rightarrow b_1$  时趋于零的方式。如果  $c \rightarrow b_1$  时,  $c$  趋于零的阶数 (其定义见后文) 足够低, 便可保证积分收敛。

具体来讲, 如果当  $c \rightarrow b_1$  时,  $c = A(c)$  的渐近行为可用下式描写:

$$A(c) \propto (c - b_1)^\nu, \quad (30)$$

则  $t_0$  的存在由  $\nu$  值确定,  $\nu$  称为  $c$  趋于零的阶数。为保证  $A(b_1) = 0$ , 必须有  $\nu > 0$ 。(7) 式中积分收敛的条件为

$$\nu < 1. \quad (31)$$

只当阶数  $\nu$  低于 1 时, 才可能在有限时间内达到饱和, 并且当  $c \rightarrow b_1$  时有  $t_0(c) \rightarrow 0$ 。同时, 由 (12) 式, 有  $n_0(b_1) = 0$ 。本文所采用的扩展速率模型 (19) 式相当于  $\nu = 1/2$ , 故饱和时间是有限的。饱和现象的出现与临界尺度  $b_1$  的取法无关, 例如当取  $b_1 = 0$  时, 仍可出现饱和现象。关键在于  $A(c)$  在临界尺度附近趋于零的方式, 即由  $\nu$  决定。当然, 如果对于任何尺度的裂纹扩展速率均不为零, 则 (7) 式定义的饱和时间  $t_0$  总是有限的。在这种情况下, 亦将出现饱和现象, 扩展速率为常数的模型便是例子之一。

现考虑  $\nu \geq 1$  情形, 此时  $t_0 \rightarrow \infty$ , 不可能在有限时间内达到饱和。对于  $\nu = 1$  情形, 由 (12) 式,  $n_0(b_1)$  为有限值, 表明存在有限的稳态解。在这种情况下, 趋向饱和的过程呈现为一种渐近行为,  $n(c, t)$  不断接近其饱和值, 但在有限时间内不能完全达到饱和。在 Berry 的扩展速率模型 (18) 式中, 若令  $q = 1$ , 则属于  $\nu = 1$  的情形。对于  $\nu > 1$  情形, 有

$$A'(b_1) = 0,$$

由 (12) 式得到  $n_0(b_1) \rightarrow \infty$ 。在这种情况下, 方程 (1) 在扩展区不存在稳态解, 不出现趋向饱和的行为。

目前, 在本实验室用轻气炮进行的一维应变平面冲击实验中, 已经获得在  $10^2 - 10^3 \text{ ns}$  恒值

脉冲载荷下<sup>[5,6]</sup>材料微裂纹损伤的初步实验结果。已有的实验数据尚未能提供微裂纹数密度统计分布  $n(c, t)$  的全部演化数据。因此,对于本文所揭示的微裂纹分布的饱和现象还不能直接提供实验验证。但是,实验结果间接地肯定了(16)式所示的总数密度对时间的线性依赖关系。对承受平面冲击后的铝靶板进行剖面微损伤裂纹的检查和计数,在  $10^2$ — $10^3$  ns 恒值脉冲载荷下材料中发生的初始层裂的实验数据拟合给出<sup>1)</sup>

$$(\sigma - \sigma_0)t_i = K. \quad (32)$$

这里,初始层裂是指最初可观测到的微裂纹形成的层裂,  $K$  为相应于损伤程度的度量。发现  $k$  的拟合值为 0.9661。同时,微裂纹成核总数的实验统计结果表明,成核数与应力大致呈线性关系<sup>1)</sup>。综合这些实验结果可以看出,在微裂纹损伤初期,总数密度随时间成线性增长的理论结果((16)式)看来是成立的。

在本文所用模型下,非扩展区 ( $c < b_1$ ) 不存在稳态解,同时,在非扩展区与扩展区的交界处 ( $c = b_1$ ),  $n(c, t)$  是不连续的。这种不连续性看来不太合理,它起因于模型在数学上过于简化。有某些迹象表明,成核率也可能存在一个下限截断尺度。如果令其与扩展速率的截断尺度相同,则不会出现不连续性,也不存在纯粹的非扩展区。

在本文所考虑的模型中,系统内一定尺度的裂纹其扩展速率是确定的,我们称之为确定性扩展速率模型。具有随机扩展速率的模型我们将另文阐述。

本文所讨论的理想微裂纹系统略去了裂纹间互相连接(融合)的过程,并且不考虑裂纹间的相关效应。这种模型可用于描述损伤初期微裂纹尚比较稀疏的情形。随着微裂纹数密度逐渐增大,融合过程和相关效应会变得重要起来。关于这方面的问题,我们将另文进行讨论。

## 参 考 文 献

- [1] Berry, J. P., *J. Mech. Phys. Solids*, 31(1960), 2233.
- [2] Bai Yilong, Ke Fujiu & Luo Limin, *J. de Physique Colloque C3*, Supplément au n° 9, 49(1988), 9: C 3—215.
- [3] 柯孚久、祁祥麟、白以龙、李劲松,航空学报, 11(1990), 3.
- [4] Curran, D. R. et al., *Phys. Reports*, 147(1987), 253.
- [5] Shen, Letian et al., *Macro-and Micro-Mechanics of High Velocity Deformation and Fracture*(Eds, Kawata, K. & Shioiri, J.), Springer-Verlag, Berlin, 1985, 27—36.
- [6] Shen Letian, Bai Yilong & Zhao Shida, *Proc. of Int. Symp. on Intense Dynamic Loading and Its Effects*, Science Press, Beijing, China, 1986, 753—758.

1) 骆利民,一种铝合金层裂损伤成核规律的实验研究和简单演化模型,中国科学院力学研究所,硕士论文,1988.