

应力波在线性磁滞体中的衰减

中国科学院力学研究所 白以龙

提要 通过对爆炸在岩石中产生的应力波的物理分析,判断岩石应力应变关系的磁滞效应可能是应力波在岩石中衰减的主要物理机制。在线性磁滞模型下,用拉氏变换和渐近展开方法,求得应力波传播的解析解。特别是得到了应力波头以 $\hat{p} = \sigma_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^l$ 方式衰减的应力波的特解。这种解所具有的一系列特性(波形自相似,波形特征,走时和半衰期的关系,动力学和运动学参量的峰值等)与实践观测结果及已有经验公式有相当好的一致性。并表明衰减指数 l 仅由磁滞参数 α 和参数 Q 确定 [$l = 1 + (\alpha Q/2)$], Q 为无量纲应力波头导数的绝对值。因此,这个模型可作为进一步分析物理机制和建立经验公式的基础。

一、问题的提出

应力波从炸药(能量释放源)所在地传播出去是逐渐衰减的。按弹性理论,它在球对称情况下的衰减规律为峰值应力 $\hat{\sigma}$ 与距离 r 的一次方成反比:

$$\hat{\sigma} \propto 1/r \quad (1.1)$$

即衰减指数为 1,与介质性质无关。但是大量的工程实践和科学实验表明,球对称应力波的应力峰值衰减规律为

$$\hat{\sigma} = K \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^l \quad (1.2)$$

式中衰减指数 $l > 1$, W 为炸药当量, K 为介质常数。对于岩石介质, $l = 2-3$, 即应力波以较弹性波更迅速的方式衰减,岩石不是弹性的,而是有能量耗散的。

许多实验表明,岩石具有明显的磁滞性质(图 1)。卸载后,重复加载至原最大应力,路线不重复,而成一环线。在一维情况下,这种性质可用如下的多项式表示:

$$\Delta\sigma = (E + E_1\Delta\varepsilon + E_2\Delta\varepsilon^2 + \dots)\Delta\varepsilon \quad (1.3)$$

式中 ε 是应变, E 是模数。

从物理上认识磁滞现象,文献[1]的说法看来比较合理:“这种衰减形式(指磁滞)可能在某些范围内出现,在经历了塑性变形的固体或十分不均匀的物质中,甚至在低应力下也会出现。后者包含了许多裂纹或其他应力集中因素,它们在较小的整体应力下也会使局部发生塑性变形。”构成大地的岩石,正是这样一种不均匀的充满裂隙的介质。

已有的弹塑性理论是在金属材料力学性质实验资料的基础上建立起来的,它概括了

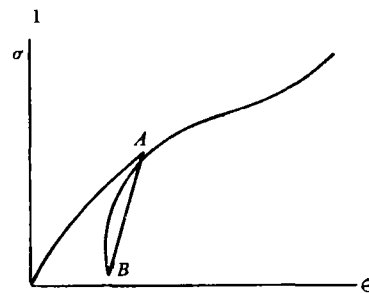


图 1 岩石磁滞性质示意图

金属材料弹塑性变形的一些特点。例如：屈服准则与静水压力无关，体积没有塑性的变化等。但就目前见到的实验资料看(图3)岩石与从金属抽象出来的弹塑性体很有些不同，除表现明显的脆性、剪胀性特征，在应力应变关系上，还显示磁滞性^[2-4]。就是卸载和再加载之间呈一磁滞回线，而且往往卸载到某较低应力水平后，应变有较大的恢复。对于岩石，还有下面两个特点：1. 体积变形也有塑性变形，而且也呈磁滞回线；2. 几乎没有弹性加载段。我们简称具有这一类特点模型为磁滞体。

二、计算模型和基本方程

本文只讨论无限介质(主要是岩石)中球对称的应力波。这时计算模型还可更简单一些(图2)。

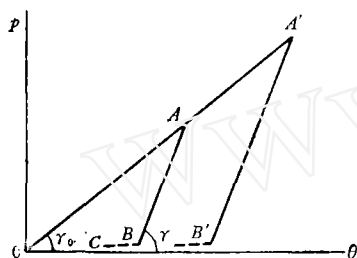


图2 线性磁滞示意图
 $\tan \gamma = \rho c^2, \tan \gamma_0 = \rho c_0^2$

首先，爆炸应力波在达到最大峰值后，通常便渐渐衰减到零，再加载问题不突出。因此计算中只计及卸载而不考虑再加载。其次，在卸载段中，转折点B的应力水平一般很小，因此，从能量耗散(而不是从残余应变)的角度看，AB段代表了能量消耗的主要部分在后面的计算中，仅计算AB段(即使应力小于零，或有少许再加载，计算也仍沿AB段进行)。

现在估计一下数量级。令 ρ 为密度， p 为压力， v 为质点速度， e 为固体中击波线性律的常数，于是当

$\frac{v}{e} \ll 1$ 时，有

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \sim \frac{v}{e}, \quad \frac{p}{\rho_0 e^2} \sim \frac{v}{e} \quad (2.1)$$

例如设 $e \sim 5 \times 10^3 \text{ cm/s}$, $\rho_0 \sim 3 \text{ g/cm}^3$, 当 $v \sim 50 \text{ m/s}$ 时, $v/e \sim 1\%$ 。因此 $p/(\rho_0 e^2) \sim 1\%$, 则 $p \sim 7500 \text{ kg/cm}^2$, 即压力为每平方厘米几千公斤或更低时, 问题可线性化。此时便得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\rho_0 v}{r} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.2)$$

估计一下 $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$ 和 $2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 4 \frac{\tau}{r}$ 的数量级。若 $r \sim 100 \text{ m}$, $c \sim 5000 \text{ m/s}$, 上升时

间 $T_R \sim 10 \text{ ms}$, 则

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} / \left(4 \frac{\tau}{r} \right) \sim \frac{\sigma_r r}{\tau \lambda} \sim \frac{\sigma_r}{2\tau} \quad (2.3)$$

一些岩石实验表明, 在每平方厘米几公斤应力时, σ_r 和剪切强度 τ_0 相当, 而当 $\sigma_r \sim p$ 约为每平方厘米百到千公斤时, $(\tau_0/\sigma_r) \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ (图3)。因此, 在这个范围内, 作为初级近似, 本文忽略了剪应力。此时 $\sigma_r = p$ 。引入速度势 φ : $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, 整个问题化为声学方程

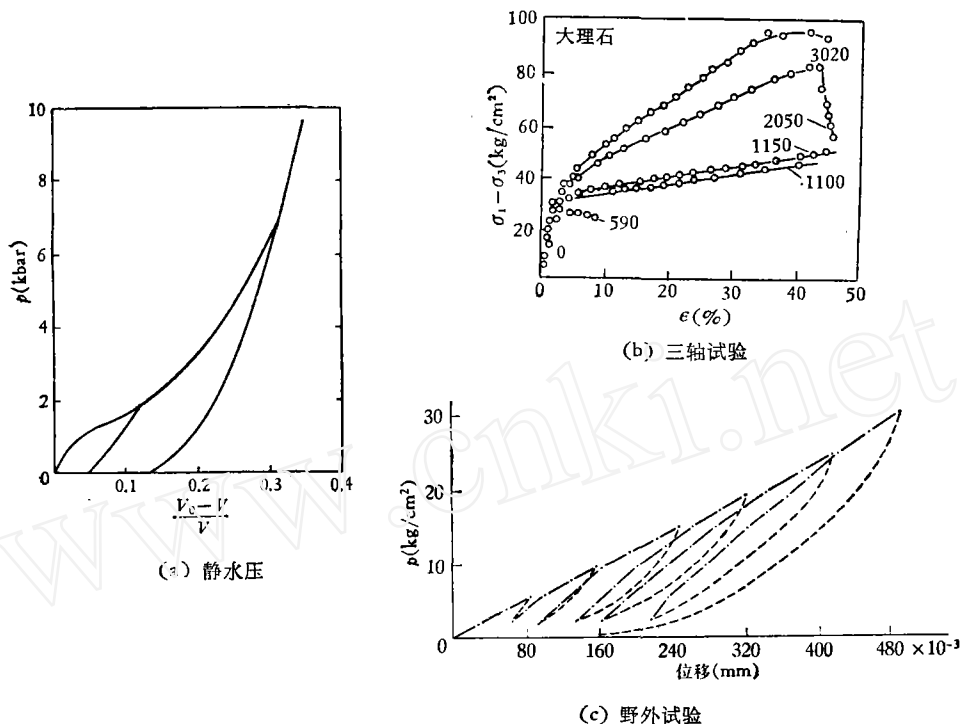


图 3 几种典型的岩石力学实验曲线

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 \varphi, & \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r}, & c^2 &= \frac{dp}{d\rho} \\
 m &= 2 \text{ (球对称)} & 1 \text{ (柱对称)} & & 0 \text{ (平面)} & \\
 \mathbf{v} &= \nabla \varphi, & \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt}, & p &= -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \rho \approx \rho_0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

方程(2.4)中采用的波速是 c , 因此所描述的是某质点在一次加载至 $p_{\max}$ 后, $p < p_{\max}$ 在 AB 段的卸载过程。

于是有关于计算模型的第一假定: 小变形, 忽略剪力, 线性加卸载的磁滞体 (图 2)。

边界条件为在 r_0 处已知压力波形为 $\sigma(t)$; 在波头 $r = r_0 + c_0 t$ 处服从波阵面守恒条件, 即

$$r = r_0, \quad p = \sigma(t); \quad r = r_0 + c_0 t, \quad dp = \rho c_0 dv \quad (2.5)$$

上述问题提法描述了在波头突加峰值载荷 (沿 $OAA' \cdots$) 后沿 AB 或 $A'B'$ 等的卸载现象。

为便于问题求解, 特别是求波头的解, 改用自变数 r 和 $T = t - [(r - r_0)/c_0]$, T 的意义是当波头到达某点时, 开始计时。于是 φ 是含隐变量的函数:

$$\varphi(t, r) = \varphi[t(T, r), r] \quad (2.6)$$

用 $\varphi(r, T)$ 表示的物理参数为

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \varphi}{\partial T} \quad (2.7)$$

微分方程和边界条件变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} &= c^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} - \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial T} \right) + \frac{m}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right) \right] \\ r = r_0 \text{ 时, } -\rho \frac{\partial \varphi(r_0, T)}{\partial T} &= \sigma(T) \\ T = 0 \text{ 时, } \frac{\partial \varphi(r, 0)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

三、平面波和球面波的解

用拉氏变换求解, 方程化为非齐次变系数的线性方程:

$$\left. \begin{aligned} c^2 \frac{d^2 \Phi(r, s)}{dr^2} + c^2 \left[\frac{m}{r} - \frac{2s}{c_0} \right] \frac{d\Phi}{dr} - \left[s \frac{c^2 m}{c_0 r} + \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2} \right) s^2 \right] \Phi \\ + \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2} \right) \varphi'_r(r, 0) = 0 \\ s\Phi(s, r_0) = -\frac{\Sigma(s)}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Φ 和 Σ 分别为 φ 和 σ 的象函数, s 是象函数的自变数.

方程 (3.1) 的齐次解在 $m=0$ (平面波) 和 $m=2$ (球面波) 时分别为

$$\Phi = A(s) e^{(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c})sr} + B(s) e^{(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c})sr}, \quad m=0 \text{ 时} \quad (3.2)$$

$$\Phi = \frac{1}{r} \left[A(s) e^{(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c})sr} + B(s) e^{(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c})sr} \right], \quad m=2 \text{ 时} \quad (3.3)$$

在 $c > c_0$ 时指数都大于零, 因此 $r \rightarrow \infty$ 时, $\Phi \rightarrow \infty$, 这是不合理的. 所以方程 (3.1) 的全部解也就是非齐次特解.

下面我们用渐近展开方法求解. 令

$$\Phi(s, r) = \frac{\phi(s, r)}{s^2} = \frac{1}{s^2} \left\{ \phi_{-2}(r) s^2 + \phi_{-1}(r) s + \phi_0(r) + \frac{\phi_1(r)}{s} + \frac{\phi_2(r)}{s^2} + \dots \right\} \quad (A)$$

代入方程 (3.1), 使 s^n 同阶的项相等, 便得到

$$\left. \begin{array}{ll} m=0 & m=2 \\ s^2 & \phi_{-2} = 0 \quad \phi_{-2} = 0 \\ s^1 & \phi_{-1} = 0 \quad \phi_{-1} = 0 \\ s^0 & \phi_0 = \varphi'_r(0, r) \quad \phi_0 = \varphi'_r(0, r) \\ s^{-1} & \phi_1 = \frac{2c_0}{\alpha} \phi'_0(r) \quad \phi_1 = \frac{2c_0}{\alpha} \left[\phi'_0 + \frac{\phi_1}{r} \right] \\ s^{-2} & \phi_2 = \frac{c_0^2}{\alpha} \left(\frac{4}{\alpha} - 1 \right) \phi''_0 \quad \phi_2 = \frac{c_0^2}{\alpha} \left[\frac{2}{c_0} \left(\phi'_1 + \frac{\phi_1}{r} \right) - \left(\phi''_0 + \frac{2\phi'_0}{r} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (B)$$

$$s^{-n} \quad \psi_n = \frac{c_0^2}{\alpha} \left[\frac{2}{c_0} \psi'_{n-1} - \psi''_{n-2} \right] \quad \psi_n = \frac{c_0^2}{\alpha} \left[\frac{2}{c_0} \left(\psi'_{n-1} + \frac{\psi_{n-1}}{r} \right) - \left(\psi''_{n-2} + \frac{2}{r} \psi'_{n-2} \right) \right]$$

式中 $\alpha = 1 - (c_0^2/c^2)$, α 不仅是加卸载模数的差异, 也是能量耗散的指标. 函数 $\psi_n(r)$ 上的撇表示对 r 求导数.

若 $\psi_0(r) = \varphi'_T(0, r)$ 已知, 则上述各公式便给出所有 $\psi_n(r)$ 的表达. 但 $\psi_0(r) = \varphi'_T(0, r)$ 恰恰就是我们最感兴趣的波头传播规律. 现根据边界条件来确定 $\psi_0(r)$. 设 $\psi_0(r)$ 有级数形式:

$$\psi_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_0^{(n)}(r_0)}{n!} (r - r_0)^n \quad (C)$$

对边界条件同样做 s 的渐近展开:

$$\Phi(s, r_0) = -\frac{\Sigma(s)}{\rho s} = \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{s^n} \quad (D)$$

将所得的解 $\Phi(s, r)$ 用到 $r = r_0$ 处, 便得到

$$\psi_n(r_0) = B_n \quad (E)$$

再根据前述各阶 s^n 的方程 (B) (也用到 $r = r_0$ 处), 便可得到 $\psi_0(r)$ 在 r_0 处的各阶导数 $\psi_0^{(n)}(r_0)$. 至此, 反回去由公式 (C) 便能确定函数 $\psi_0(r)$, 也就是波头传播的行为. 将 $\psi_0(r)$ 再代回方程 (B), 便可逐次求得函数 $\psi_1, \psi_2, \dots$. 再根据式 (A), 象函数 $\Phi(s, r)$ 便得解. 最后经过反演, 全部问题就解决了.

用函数 $\psi_n(r)$ 表示的解如下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(T, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(r)}{(n+1)!} T^{n+1} \\ p &= -\rho \frac{\partial \varphi(r, T)}{\partial T} = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(r)}{n!} T^n \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \varphi}{\partial T} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{T}{n+1} \psi'_n - \frac{1}{c_0} \psi_n \right] \frac{T^n}{n!} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

在波头上,

$$\dot{p} = -\rho \dot{\psi}_0(r), \quad \dot{v} = -\frac{1}{c_0} \dot{\psi}_0(r) \quad (3.5)$$

例 1 $c = c_0$ 按照 α 的定义便有 $\alpha = 0$. 此时无非齐次项. 有一个齐次解有效:

$$\Phi(s, r) = B(s), \quad m=0 \text{ 时}; \frac{B(s)}{r}, \quad m=2 \text{ 时} \quad (3.6)$$

反演后得到

$$\varphi = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{(n+1)!} T^{n+1}, & m=0 \text{ 时} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{(n+1)!} T^{n+1} \left(\frac{r_2}{r} \right), & m=2 \text{ 时} \end{cases} \quad (3.7)$$

于是知道,在波头上平面波不衰减,球面波以 $1/r$ 方式衰减,这就是一般弹性波理论的结果,

例 2 以 $\hat{p} = \sigma_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-l}$ 衰减的球对称应力波 设

$$\psi_n = A_n / r^{n+l} \quad (3.8)$$

要使式 (3.8) 满足方程 (B), 只需系数 A_n 满足以下条件:

$$\left. \begin{aligned} \alpha A_1 &= -(l-1)2c_0 A_0 \\ \alpha A_n &= -(n+l-2)[2c_0 A_{n-1} + (n+l-3)c_0^2 A_{n-2}] \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

在边界 r_0 处有

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(r_0) &= A_0 / r_0^l = B_0 \\ \psi_1(r_0) &= A_1 / r_0^{l+1} = B_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_n(r_0) &= A_n / r_0^{l+n} = B_n \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

第一个条件可以确定出 $A_0 = -\sigma_0 r_0^l / \rho$.

四、以 $\hat{p} \propto r^{-l}$ 规律衰减的球对称应力波的各种特征

实用中发现许多爆炸源辐射的应力波的峰值应力以 r^{-l} 规律衰减,我们做第二假定

$$\hat{p} \propto r^{-l} \quad (4.1)$$

下面分析这种应力波的各种特征,先讨论 A_n 的递推公式及解的解析表达, A_n 的递推公式可改写为

$$\alpha A_{n+2} + 2(n+l)c_0 A_{n+1} + (n+l)(n+l-1)c_0^2 A_n = 0 \quad (4.2)$$

根据文献[6],

$$\begin{aligned} A_n &= (n+l-2)(n+l-3)\dots l(l-1) \left(\frac{c_0}{\alpha} \right)^n \frac{A_0}{2\sqrt{1-\alpha}} \\ &\quad \times [(\sqrt{1-\alpha}-1)^{n+1} + (-1)^n(\sqrt{1-\alpha}+1)^{n+1}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

将式 (4.3) 代入无量纲压力 $\bar{p}$ 的公式,可得级数和代数形式的解

$$\begin{aligned} \bar{p} = \frac{p(r, T)}{\hat{p}(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+l-2)\dots l(l-1)}{n!} \frac{(1+\sqrt{1-\alpha})^{n+1} - (1-\sqrt{1-\alpha})^{n+1}}{2\sqrt{1-\alpha}} \\ &\quad \times \left(-\frac{\tilde{T}}{\alpha} \right)^n = \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \left\{ \frac{\beta_1}{(1+\beta_1\tilde{T})^{l-1}} - \frac{\beta_2}{(1+\beta_2\tilde{T})^{l-1}} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

式中

$$\tilde{T} = \frac{c_0 T}{r}, \quad \beta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha}}{\alpha} \quad (4.5)$$

$$\text{当 } \alpha = 1 \text{ 时, } \bar{p} = \frac{1 + (2-l)\tilde{T}}{(1+\tilde{T})^l} \quad (4.6)$$

$$\varphi = -\frac{\sigma_0}{\rho} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+l-2) \cdots l(l-1)}{(n+1)!} \frac{(1+\sqrt{1-\alpha})^{n+1} - (1-\sqrt{1-\alpha})^{n+1}}{2\sqrt{1-\alpha}} \\ \times \tilde{T} \left(-\frac{\tilde{T}}{\alpha}\right)^n = \frac{\dot{p}}{\rho c_0} r \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{l-2} \left\{ \frac{1}{(1+\beta_1\tilde{T})^{l-2}} - \frac{1}{(1+\beta_2\tilde{T})^{l-2}} \right\} \quad (4.7)$$

$$\text{当 } l = 2 \text{ 时, } \varphi = \frac{\dot{p}}{\rho c_0} r \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \ln \frac{1+\beta_2\tilde{T}}{1+\beta_1\tilde{T}} \quad (4.8)$$

$$\text{当 } \alpha = 1 \text{ 时, } \varphi = -\frac{\dot{p}}{\rho c_0} r \frac{\tilde{T}}{(1+\tilde{T})^{l-1}} \quad (4.9)$$

$$v = \frac{\dot{p}}{\rho c_0} \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \left\{ \frac{1}{l-2} \left[\frac{1}{(1+\beta_2\tilde{T})^{l-1}} - \frac{1}{(1+\beta_1\tilde{T})^{l-1}} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1-\beta_2}{(1+\beta_2\tilde{T})^{l-1}} - \frac{1-\beta_1}{(1+\beta_1\tilde{T})^{l-1}} \right] \right\} \\ = \frac{\dot{p}}{\rho c_0} \left\{ \bar{p} + \tilde{T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+l}{n+1} \frac{(n+l-2) \cdots l(l-1)}{n!} \right. \\ \left. \times \frac{(1+\sqrt{1-\alpha})^{n+1} - (1-\sqrt{1-\alpha})^{n+1}}{2\sqrt{1-\alpha}} \left(-\frac{\tilde{T}}{\alpha}\right)^n \right\} \quad (4.10)$$

$$\text{当 } l = 2 \text{ 时, } v = \frac{\dot{p}}{\rho c_0} \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \left[(l-1) \ln \frac{1+\beta_2\tilde{T}}{1+\beta_1\tilde{T}} \right. \\ \left. - (\beta_2 - \beta_1) \frac{1+\tilde{T}}{(1+\beta_1\tilde{T})(1+\beta_2\tilde{T})} \right] \quad (4.11)$$

$$\text{当 } \alpha = 1 \text{ 时, } v = \frac{\dot{p}}{\rho c_0} \frac{1}{(1+\tilde{T})^{l-2}} \quad (4.12)$$

$$\bar{a} = \frac{a}{\dot{p} c_0 / r} \approx \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tilde{T}} = \bar{p} - \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} (l-1) \left[\frac{\beta_1(\beta_1-1)}{(1+\beta_1\tilde{T})^l} - \frac{\beta_2(\beta_2-1)}{(1+\beta_2\tilde{T})^l} \right] \quad (4.13)$$

在第二假定下取 $\hat{a}$ 表达式中 r 的最低阶数, 则其主要部分为

$$\hat{a}_M = \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \phi'_0 - \frac{2}{\alpha} \frac{\phi_0}{r} = \frac{\sigma_0}{\rho} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l \frac{1}{r} \left[l - (l-1) \frac{2}{\alpha} \right] \quad (4.14)$$

此值实际上是负的, 所以在本文的假设下只出现最大的减速度。

现在讨论应力波的特性 (图 4—6)。

1. 应力波在传播中保持自相似 根据量纲分析, 知道压力

$$p = p(r, t) = p\left(\frac{r}{W^{1/3}}, \frac{c_0 t}{r}\right) \quad (4.15)$$

前面的解析解表明, 对于波头以 $\dot{p} = \sigma_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^l$ 规律衰减的特解, 按波头峰值应力无量纲的

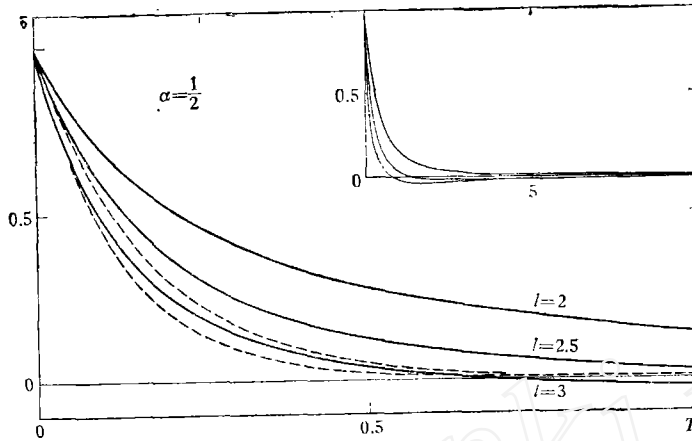


图 4

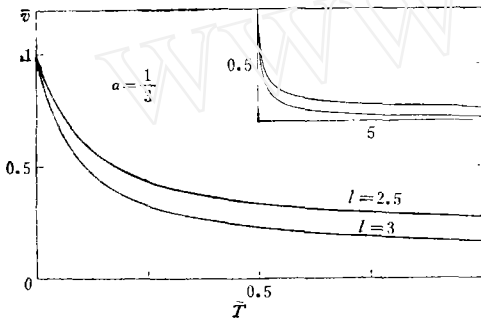


图 5

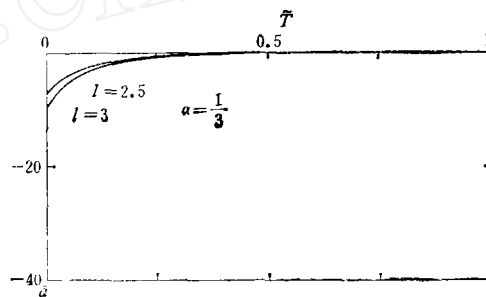


图 6

应力 $\bar{p}$, 却仅是一个自变数 $\tilde{T} = \frac{c_0 T}{r}$ 的函数, 即应力波在传播过程中虽然波的峰值和波形在不断地变化, 但是, 假若度量应力的尺度取作当地的压力波峰, 度量时间的尺度取作到 r/c_0 (并从波到达该点开始计时), 那么波形在传播中永远是不变的。这一特性对分析实验数据和建立简单公式显然是非常重要的。

2. 应力波形在峰值邻域总是随时间衰减而且是下凸的 根据 $\bar{p}$ 的公式, 在 $\tilde{T} = 0$ 处的第一, 二阶导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{d\tilde{T}} \Big|_{\tilde{T}=0} &= -\frac{2}{\alpha} (l-1) < 0, \text{ 当 } l > 1, 0 < \alpha < 1 \text{ 时} \\ \frac{d^2\bar{p}}{d\tilde{T}^2} \Big|_{\tilde{T}=0} &= \frac{4}{\alpha^2} (l-1)l \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

因此, 应力波头后缘总是衰减的, 波形是下凸的。

3. 走时和正压时间, 半衰期的关系 根据应力波在传播中保持自相似的特性, 应力波衰减的度量, 即无量纲正压时间或半衰期, 总是不随位置 r 变化的, 只依赖于参数 α 和 l 而变化, 无量纲正压时间

$$\tilde{T}_+ = \frac{c_0 T_+}{r} = \left[1 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{1}{l-1}} \right] / \left[\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{1}{l-1}} \beta_2 - \beta_1 \right] \quad (4.17)$$

当 $l = 2$ 时, $\tilde{T}_+ = \infty$. 在其他情况下, 波尾一般拖得也较长, 较平缓. 因此, 从实际波形上去量正压时间 $\tilde{T}_+$, 一般并不方便也不易准确.

更便于理论分析和实际测量的衰减参量, 我们建议用无量纲半衰期 $\tilde{T}_*$ 在本解析解中, $\tilde{T}_*$ 可用下式计算:

$$\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\alpha} = \frac{\beta_1}{(1+\beta_1\tilde{T}_*)^{l-1}} - \frac{\beta_2}{(1+\beta_2\tilde{T}_*)^{l-1}}, \quad \tilde{T}_* = \frac{c_0 T_*}{r} \quad (4.18)$$

可以看出, 无论无量纲正压时间 $\tilde{T}_+$ 或半衰期 $\tilde{T}_*$, 都仅是参数 α 和 l 的函数. $\tilde{T}_*$ 随 α 和 l 的变化如图 7.

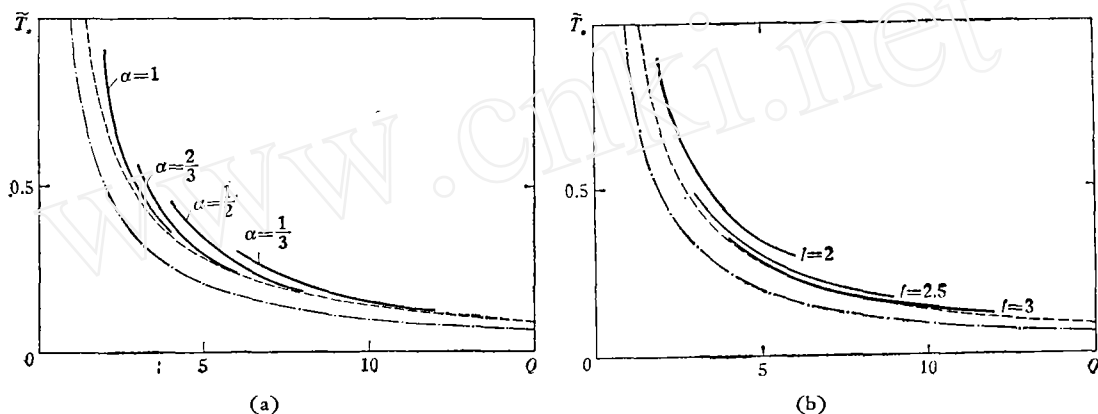


图 7

4. 衰减指数 l 实际应用中非常关心衰减指数 l 的大小及影响它的因素. 根据上面的特性, 在一定的介质中 (α 一定), 倘若知道无量纲波形的任一特征, 例如一对相应的 $\bar{X}_c$ 及 $\tilde{T}_c$ 的值:

$$\bar{X}_c = f(\tilde{T}_c, \alpha, l) \quad (4.19)$$

从经验中找到 $\tilde{T}_*$, 就可根据介质性质 α 求出任意介质中的衰减指数 l .

此外, 还可以通过已知函数 f 的导数来找这种关系. 其中最简单的是衰减指数 l 与 $\bar{p}$ 在 $\tilde{T} = 0$ 处一阶导数绝对值 Q 的关系:

$$Q = \left| \frac{d\bar{p}}{d\tilde{T}} \right|_{\tilde{T}=0}, \quad l = 1 + \frac{\alpha Q}{2} \quad (4.20)$$

参数 Q 可由爆源传到 r_0 (即介质开始遵守线性磁滞特性的边界) 时的波形确定.

5. 波形 图 4 中用虚线画出有相同 α 值和 Q 值的指数衰减波形和三角波形

$$\bar{p} = e^{-Q\tilde{T}}, \quad \bar{p} = 1 - Q\tilde{T} \quad (4.21)$$

与相应的解比较, 可以看出, 波形大致与指数衰减波相仿. 特别在头部, 无论是用三角波, 还是用指数衰减波来近似都是相近的; 而在尾部 ($\bar{p} < 1/2$), 则波形比三角波拖得长.

6. $\tilde{T}_*$ - Q 关系

一般说来, 由式 (4.18) 无量纲半衰期是 α 和 l 的二元函数. 但由图 7 可见, 在计算的数值范围内, Q - $\tilde{T}_*$ 间有几乎单值的关系: $Q \approx f(\tilde{T}_*)$.

对于指数型和三角型的波有准确的单值关系 (图 7):

$$\tilde{T}_* = \log 2/Q \quad \text{指数型波(虚线)}$$

$$\tilde{T}_* = 1/(2Q) \quad \text{三角型波(点划线)}$$

五、与经验结果的对比

现在综述一下线性磁滞模型得到的理论结果和与实际观测及经验公式的比较。

1. 波形特征

1) 应力波形自相似性 理论结果: 应力波在传播过程中保持自相似, 用峰值参数无量纲化后, 仅是单变数 $\tilde{T} = c_0 T/r$ 的函数。经验: 目前未见到系统整理资料, 但有越远 (r 越大), 波拖得越长 (T 越长) 的直观概念。

2) 波形 理论结果: 应力波形在峰值邻域总是随时间衰减的, 而且是下凸的。在 $\tilde{T} < \tilde{T}_*$ 的阶段, 波形与三角型和指数型都接近。在 $\tilde{T} > \tilde{T}_*$ 的阶段, 波形比三角形拖得长, 与指数型接近。经验: 根据文献 [7] 的整理, 波形为三角形。根据其他人的整理, 波形有斜线上升前沿, 峰值后按指数衰减。

3) 走时和半衰期的关系 理论结果: $\tilde{T}_* = f(\alpha, l)$, 数例见表 1。经验: 据文献 [7], $\tilde{T}_+ = 1/2$, $\tilde{T}_{\text{上升}} = \tilde{T}_+/3 = 1/6 = 0.1667$ 。对于三角波, 半衰期 (从峰值算起) $\tilde{T}_* = (\tilde{T}_+ - \tilde{T}_{\text{上升}})/2 = 1/6 = 0.1667$ 。

表 1 无量纲半衰期

l	$\tilde{T}_*$	α	1/3	1/2	2/3	1
2			0.15(6)	0.22(4)	0.28(3)	
2.5			0.09(9)	0.135(6)	0.17(4.5)	0.25(3)
3					0.12(6)	0.18(4)

注: 括弧内数字是相应的 Q 值。

2. 峰值衰减规律

理论和经验的峰值衰减规律如下:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{经 验} & \text{理 论} \\ \text{径向应力} & \frac{\hat{\sigma}_r}{\rho c_p^2} = \bar{K}_{\sigma, \text{em}} \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^l \quad \text{压 力} \quad \frac{\hat{p}}{\rho c_0^2} = \bar{K}_\sigma \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^l \\ \text{径向应变} & \hat{\epsilon}_r = \bar{K}_{\sigma, \text{em}} \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^l \quad \text{体积应变} \quad \hat{\theta} = \bar{K}_\sigma \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^l \\ \text{径向质点速度} & \frac{\hat{v}}{c_p} = \bar{K}_{\sigma, \text{em}} \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^l \quad \frac{\hat{v}}{c_0} = \bar{K}_\sigma \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^l \\ \text{径向加速度} & \frac{W^{1/3} \hat{a}_r}{c_p^2} = \bar{K}_{a, \text{em}} \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^{l+1} \quad \frac{W^{1/3} \hat{A}}{c_0^2} = \bar{K}_a \left(\frac{W^{1/3}}{r} \right)^{l+1} \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

式中 c_p 为纵波速度, $\bar{K}_\sigma = \frac{K_\sigma}{\rho c_0^2} = \frac{\sigma_0}{\rho c_0^2} \left(\frac{r_0}{W^{1/3}} \right)^l$, $\bar{K}_a = \left[l - (l-1) \frac{2}{\alpha} \right] \bar{K}_\sigma$ 。

由此看出, 若取 $c_p = c_0$, 对于应力、应变、质点速度、加速度等参数的峰值, 理论公式和经验公式的数学形式都是一致的。为了能够从理论上预测峰值的衰减规律, 必须预先

知道 l (衰减指数), c_0 , ρ , σ_0 , $(r_0/W^{1/3})$ 及 α 等六个参数, 后五个都是介质常数. 因为 $0 < \alpha < 1$, 所以

$$1 < l < 1 + (Q/2) \quad (5.2)$$

下面做个简单的比较. 取 $\tilde{T}_* = 1/6$, 按照图 7 和公式 (4.20), 得到表 2.

表 2 $\tilde{T}_* = 1/6 = 0.1667$

l	2	2.5	3
Q	5.1	4.5	4.2
α	0.412	0.667	0.952

我们还可根据文献[7]给的经验数据来反算参数 α , Q 和 $\tilde{T}_*$. 例如对凝灰岩, 文献[7]给出 $\bar{K}_\sigma = 4.56$, $\bar{K}_{a+} = 54.4$, $l = 2.5$. 代入式 (3.1) 最后一式, 便可得到

$$\alpha = \frac{2(l-1)}{l + (\bar{K}_{a+}/\bar{K}_\sigma)} = 0.208, \quad Q = \frac{2(l-1)}{\alpha} = 14.4, \quad \tilde{T}_* \sim 0.1$$

据此, 按文献[7]给出的 $\tilde{T}_* = 1/6$ 可能偏大.

另外, 根据某些水工岩体性质资料估算, 对于不同的岩石, 随破碎程度不同, α 值在 0.1—0.7 之间变化.

六、结 束 语

根据本文对应力波在岩石中传播衰减的物理分析, 认为岩石的磁滞性是造成应力波衰减的主要机制. 在线性磁滞体的简单模型下, 用拉氏变换和渐近展开的方法, 得到了应力波传播的解析解. 对于以 $\beta \propto r^{-l}$ 方式传播的球对称应力波, 得到了极简单的解析形式特解. 对此特解的特性做了分析, 并与已经积累的一些经验结果和事实做了比较. 从比较中看到, 尽管在分析计算中采用了非常粗糙的假定, 但解析结果却与大量的经验结果和事实有相当好的一致性, 以统一的方式解释和表达了这些经验事实和规律. 无量纲的主定参数却只有二个, 即 α 和 l (或 Q). 为确定具体的有量纲形式结果, 只需预知四个参数 σ_0 , ρ , c_0 及 $r_0/W^{1/3}$ 便够了.

下面对高压区做个量纲分析来判断参数 Q 的可能行为. 假设高压区是受由 Hugoniot 曲线确定的 Grüneisen 状态方程支配的, 并且对爆源只考虑当量, 先不考虑品种.

根据量纲分析, 现象的特征时间常数

$$\bar{\theta} = \frac{e\theta}{W^{1/3}} = f\left(\gamma, \lambda, \frac{r}{W^{1/3}}\right) \quad (5.3)$$

式中 γ 是 Grüneisen 系数, λ 是击波线性律常数.

在 $r = r_0$ 处, 高、低压区的时间常数应该相等, 于是有

$$Q = \frac{r_0}{W^{1/3}} \frac{e}{c_0} f^{-1}\left(\gamma, \lambda, \frac{r_0}{W^{1/3}}\right) \quad (5.4)$$

由于 $(r_0/W^{1/3})$ 是介质参数, 所以 Q 也应当是与当量无关的介质参数. 这样, 在给定的当量下, 整个波传播的基本特性便由几个介质特性参数完全控制了.

由于本文是对岩体中应力波的衰减机制做简化的物理模型分析,因此,存在一些由于简化而带来的缺陷。如它不能反映应力波的上升过程,没有考虑强度影响以及磁滞回线中的 BC 卸载段造成的变形恢复等。这些有待于进一步完善计算的物理模型来改进。

参 考 文 献

- [1] Cottrell, A. H., The Mechanical Properties of Matter, Wiley, New York (1964).
- [2] Jaeger, C., Rock Mechanics and Engineering, The Univ. Pr., Cambridge (1972).
- [3] Nelson, I., et al., Shock Wave and the Mechanical Properties of Solid, ed. J. J. Burke, Syracuse Univ. (1970).
- [4] 铃木光, 岩盘力学と计测, 内田老鹤圃, 东京 (1973).
- [5] R. 希尔 (王仁等译), 塑性数学理论, 科学出版社, 北京 (1966).
- [6] Jordan, C., Calculus of Finite Differences, Chelsea, New York (1965).
- [7] Coates, D., Rock Mechanics Principles, Information Canada, Ottawa (1970).

www.cnki.net